Kvantumstatisztikus korrelációk az LHC CMS kísérletében

Szakdolgozat

Szerző:

Lukács Krisztián József
fizika BSc

Témavezető:

Csanád Máté
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Atomfizikai Tanszék

ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

2025

Kivonat

A nagyenergiájú ion-ion ütközések során létrejövő kvark-gluon plazma (QGP) vizsgálata kulcsfontosságú a Világegyetem kezdeti állapotának megértésében. A kvantumstatisztikai korrelációk segítségével feltárható az ütközések során keletkező kvarkanyag lehűlésével történő hadronizáció téridőbeli jellege. Dolgozatomban a két-részecskés Bose–Einstein korrelációk mérésének 2023-as eredményeit rekonstruálom az LHC CMS detektorának 2018-as, 5,02 TeV energiájú Pb–Pb ütközési adataiból. Reprodukciós eredményeim azt igazolják, hogy a Lévy-eloszlás stabil paraméterezése következetesen alkalmazható az ólom–ólom ütközések során keletkező hadronkibocsátó forrás téridőbeli leírására, és jó kiindulási alapot biztosít a háromrészecskés korrelációk további tanulmányozásához.

Tartalomjegyzék

1. A femtoszkópia alapjai **4**
1.1. Mi az a femtoszkópia? . . . 4
1.2. A Bose-Einstein korreláció . . . 4
1.2.1. A klasszikus HBT-korreláció . . . 4
1.2.2. HBT-effektus és a kvantummechanika . . . 6
1.2.3. A Bose-Einstein korreláció és a femtoszkópia . . . 8
1.3. Femtoszkópia a nagyenergiás nehézion-ütközésekben . . . 9
1.3.1. A megfelelő koordinátázás . . . 9
1.3.2. Miért van glóriája egy hadronforrásnak? . . . 12
1.3.3. A „szuperfolyadék” kvarkanyag . . . 14
1.3.4. Lévy-forrás . . . 16
1.3.5. Coulomb-effektus . . . 17

2. Mérési eszközök és módszerek **19**
2.1. Mi is az a CMS? . . . 19
2.1.1. Nyomkövetés és pályarekonstrukció . . . 20
2.1.2. Az időbeli és térbeli felbontás jelentősége . . . 21
2.1.3. Teljes lefedettség és hermetikus lezárás . . . 21
2.2. A korrelációs függvények mérése . . . 22
2.2.1. A használt adatstruktúra . . . 22
2.2.2. Adat szelekció . . . 23
2.2.3. A korreláció mérésének technikája . . . 24
2.2.4. Lévy-forrás illesztése . . . 29
2.2.5. A szisztematikus hibák kezelése . . . 32

3. A reprodukált és eredeti eredmények összevetése **33**
3.1. Adatszűrési tapasztalat . . . 33
3.2. A korrelációs függvények összehasonlítása . . . 34
3.3. A Lévy-skálaparaméter eredményei . . . 34
3.3.1. Tendenciák összehasonlítása . . . 35
3.3.2. A hidrodinamikai skálázás és nukleonszámfüggés . . . 36
3.4. Az α Lévy-stabilitási index . . . 37
3.4.1. A transzverz impulzusfüggés vizsgálata . . . 37
3.4.2. A nukleonszámfüggés vizsgálata . . . 38
3.5. A λ korreláció erősség m_T függése . . . 39
3.6. Az eltérések további vizsgálata . . . 39

4. Összegzés **40**

5. A kutatás továbbgondolása **41**

A. Függelék: Az analízis során használt adatok **46**

B. Függelék: Az új módszer eredményei **46**

C. Függelék: Vágások a szisztematikus hibaszámításhoz **47**

D. Függelék: Relatív eltérések pozitív részecskepárok esetére **48**

E. Függelék: Az illesztések eredményei **50**

1. A femtoszkópia alapjai

1.1. Mi az a femtoszkópia?

A nehézionok ultra-relativisztikus energiájú ütköztetések célja azon dinamikai folyamatok feltárása és jellemzése, amelyek során egy extrém magas hőmérsékletű anyag, az úgynevezett kvark-gluon plazma (röviden QGP) keletkezik, valamint e különleges anyag alapvető tulajdonságainak vizsgálata. [1]

Az ütközések után keletkező plazma rendkívül gyorsan tágul, majd a benne lévő kvarkok és gluonok kölcsönhatásának és energiájának csökkenése révén stabil részecskék jönnek létre, melyeket hadronoknak nevezünk. Magát a folyamatot hadronizációnak nevezzük és szokás azt a hadronok „kifagyásaként" is emlegetni [2], mivel a folyamat jelentős energialeadással megy végbe. E kifagyott részecskék nyomai – például töltésük, impulzusuk, tömegük és energiájuk – az ütközéstől számított kb. 10^{-23} s ($\approx 10^{-15}$ fm/c) idő múlva a femtométeres ($\sim 10^{-15}$ m) tartományban válnak detektálhatóvá. Ezen részecskeemisszió tér-időbeli jellemzésére használt módszerek összességét nevezzük femtoszkópiának.

A femtoszkópia egyik legalapvetőbb módszere a HBT-korreláción (Hanbury Brown-Twiss) alapul, melyet eredetileg az asztrofizikában figyeltek meg, mint két közeli távcsőbe érkező fotonok intenzitáskorrelációja [3]. E jelenséget később sikeresen adaptálták a nagyenergiás ütközésekben létrejövő hadronikus rendszerek vizsgálatára is [4].

E dolgozatban az LHC (Large Hadron Collider) CMS (Compact Muon Solenoid) detektorának 2018-as adatait feldolgozva, a korábban ismert eredmények reprodukálása révén bemutatása kerülnek azok a femtoszkópiai módszereket, amelyek alapját képezik a háromrészecskés korrelációk jövőbeli vizsgálatának.

1.2. A Bose-Einstein korreláció

Feltételezzük, hogy a nagyenergiás nehézion-ütözések során keletkező részecskék többsége pionok, amelyek egy (u vagy d) kvarkból és egy ($\bar{u}$ vagy $\bar{d}$) antikvarkból állnak attól függően, hogy milyen töltésű pionról van szó (jelölésük: π^+, π^-, π^0) [5][6]. E részecskék intenzitás korrelációját, vagyis a HBT-effektust a pionpárok hullámfüggvényének szimmetriájából származó Bose–Einstein-szimmetrizációval magyarázzuk, mivel az ilyen ütközések során detektált részecskepárok száma a multiplicitás (az ütközésben létrejövő részecskék száma) négyzetével arányos a kombinatorika szerint: $\binom{N}{2} \propto N^2$. Ezen korreláció hatása pedig a kis impulzuskülönbségű részecskepárok számával nő, ahogy az a következőkben részletesebben ismertetésre kerül.

1.2.1. A klasszikus HBT-korreláció

Ha van két detektorunk (A és B) egymástól d távolságra, és van egy (elsőre) foton forrásunk a két detektortól átlagosan L távolságra, amiből gömbhullámként indulnak ki az elektromágneses hullámok véletlenszerű (normál eloszlású) kezdeti fázissal (pl.

a szórás problémájából), akkor felírható az egyes detektorok helyén az amplitúdó a következőképpen.

$$A(r_A) = \frac{1}{L}(\alpha e^{i(kr_{aA}+\Phi_a)} + \beta e^{i(kr_{bA}+\Phi_b)}), \tag{1.1a}$$

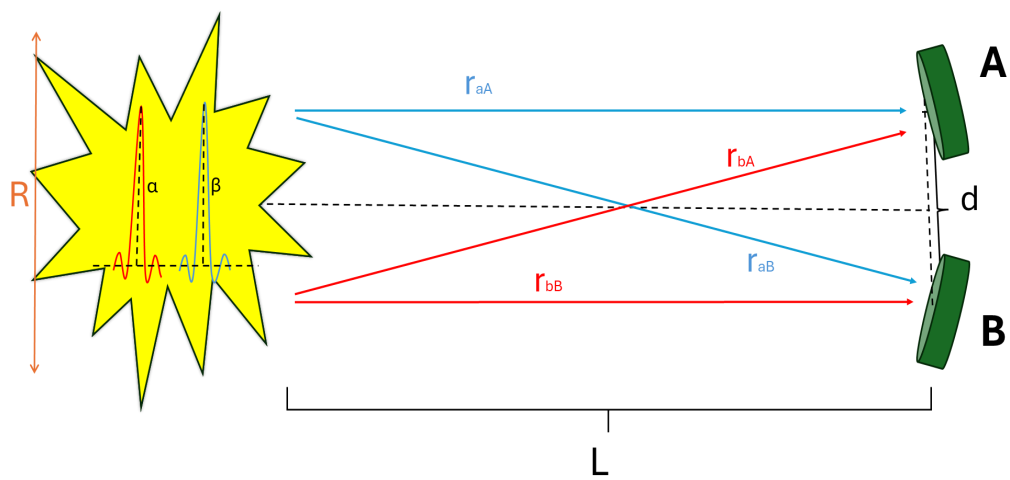
$$A(r_B) = \frac{1}{L}(\alpha e^{i(kr_{aB}+\Phi_a)} + \beta e^{i(k_{bB}+\Phi_b)}), \tag{1.1b}$$

ahol i az imaginárius egység, $r_{a,A}$ az α kezdeti intenzitású és Φ_a kezdeti fázisú forrás távolsága az A detektortól, r_{bB} a β kezdeti intenzitású Φ_b kezdi fázisú forrás távolsága a B detektortól és k_i jelöli a megfelelő hullámszámot. Látható, hogy ebben a modellben nem elhanyagolható feltétel, hogy $d << R << L$, ahol R-el jelöltük a forrás átlagos átmérőjét. Ezt teljesítve tehető meg az $r_A \approx r_B \approx L$ közelítés. Az effektus rendszerének illusztrációját a 1. ábra mutatja.

Az A detektorba jutó intenzitás az (1.2)-es egyenletből kapható meg:

$$\begin{aligned} I_A = |A(r_A)|^2 &\overset{kr+\Phi=\varphi}{=} \frac{1}{L^2}(\alpha e^{i\varphi_{aa}} + \beta^{i\varphi_{bb}})(\alpha^* e^{-i\varphi_{aa}} + \beta^* e^{-i\varphi_{bb}}) \\ &= \frac{1}{L^2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha\beta^* e^{i(\varphi_{aa}-\varphi_{bb})} + \alpha^*\beta e^{i(\varphi_{bb}-\varphi_{aa})}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

ahol * a komplex konjugálást jelöli. Ha a forrás termikus, akkor két független termikus



1. ábra. Illusztráció a detektorokba érkező intenzitások szemléltetésére olyan esetben, amikor a forrás távolsága jóval meghaladja a detektorok közötti távolságot.

fényforrás elsőrendű interferenciája nem figyelhető meg, még akkor sem, ha a fotonok degenerációs paramétere nagyobb egynél. Ennek oka, hogy a termikus fényben a fotonok kezdeti fázisai véletlenszerűek, ami megakadályozza az állandó interferenciamintázat kialakulását [7]. Tehát az átlagolásnál $\left\langle e^{i(\Phi_b-\Phi_a)} \middle| e^{i(\Phi_b-\Phi_a)} \right\rangle = 0$. Így az egy detektorba jutó intenzitásátlag:

$$\langle I_A \rangle = \langle I_B \rangle = \frac{1}{L^2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right) \tag{1.3}$$

Most nézzük meg a detektorokba jutó intenzitások szorzatának átlagát. Definíció szerint:

$$\begin{aligned}\langle I_A I_B\rangle &= \langle |A(\tau_A)|^2 \cdot |A(\tau_B)|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{L^4}\Big\langle \Big(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathcal{R}\left[\alpha^*\beta\, e^{ik(r_{bA}-r_{aA})+i(\Phi_b-\Phi_a)}\right]\Big) \\ &\qquad \cdot \Big(|\alpha|^2+|\beta|^2+2\mathcal{R}\left[\alpha^*\beta\, e^{ik(r_{bB}-r_{aB})+i(\Phi_b-\Phi_a)}\right]\Big)\Big\rangle = (*)\end{aligned} \tag{1.4}$$

Az idő átlagot elvégezve, az összes tag kiesik, amiben $e^{f(\Phi_a,\Phi_b)}$ függvény szorzatként megjelenik. Az eredmény tehát:

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{L^4}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^2 + \frac{2}{L^4}|\alpha|^2|\beta|^2 cos\left(k(r_{aA}-r_{bA}+r_{aB}-r_{bB})\right) \\ &= \langle I_A\rangle\langle I_B\rangle + \frac{2}{L^4}|\alpha|^2|\beta|^2 cos\left(k(r_{aA}-r_{bA}+r_{bB}-r_{aB})\right)\end{aligned} \tag{1.5}$$

Amiből már látható az alábbi összefüggés, ha feltesszük, hogy a kezdeti intenzitása a két fotonnak ugyanakkora volt, vagyis ha $\alpha \approx \beta$. Valamint ha ezenkívül a $d, R \ll L$ feltételek teljesülnek, akkor választhatunk olyan geometriát (lásd 1. ábra), amiben $\vec{r}_a = (\frac{R}{2},0,0)$; $\vec{r}_b = (-\frac{R}{2},0,0)$, $\vec{r}_A = (\frac{d}{2},L,0)$; $\vec{r}_B = (-\frac{d}{2},L,0)$. Ez alapján pedig felírhatóak a következő közelítések az egyszerű pitagoraszi kifejezések sorfejtéséből:

$$r_{aA} = \sqrt{L^2+\left(\frac{R}{2}-\frac{d}{2}\right)^2} \approx L + \frac{1}{2L}\left(\frac{R}{2}-\frac{d}{2}\right)^2, \tag{1.6a}$$

$$r_{bA} = \sqrt{L^2+\left(-\frac{R}{2}-\frac{d}{2}\right)^2} \approx L + \frac{1}{2L}\left(-\frac{R}{2}-\frac{d}{2}\right)^2, \tag{1.6b}$$

$$r_{aB} = \sqrt{L^2+\left(\frac{R}{2}+\frac{d}{2}\right)^2} \approx L + \frac{1}{2L}\left(\frac{R}{2}+\frac{d}{2}\right)^2, \tag{1.6c}$$

$$r_{bB} = \sqrt{L^2+\left(-\frac{R}{2}+\frac{d}{2}\right)^2} \approx L + \frac{1}{2L}\left(-\frac{R}{2}+\frac{d}{2}\right)^2, \tag{1.6d}$$

Ezt behelyettesítve a (1.6)-os egyenletbe és leosztva az intenzitásátlagok szorzatával a következő korrelációs függvények definiálhatók:

$$C_{AB}(d) = \frac{\langle I_A I_B | I_A I_B\rangle}{\langle I_A|I_A\rangle\,\langle I_B|I_B\rangle} \approx 1 + \frac{1}{2}cos\frac{kRd}{L}, \tag{1.7a}$$

$$R_{AB}(d) = \frac{C_{AB}(d)-1}{C_{AB}(0)-1} \approx cos\frac{kRd}{L}. \tag{1.7b}$$

Látszik tehát, hogy két különböző detektorba jutó foton között egy intenzitás korreláció fedezhető fel, mivel a C_{AB} nem tökéletesen egy.

1.2.2. HBT-effektus és a kvantummechanika

S. N. Bose 1922-ben egy előadása során arra törekedett, hogy bemutassa: a Planck-féle kvantummechanikai elmélet – amely akkoriban még új tudományos irányzatnak

számított – ellentmondásba kerülhet az észlelt sugárzási adatokkal. Számításai során azonban – feltehetően véletlenül – nem a klasszikus, Boltzmann-féle statisztikát alkalmazta, hanem egy olyan újfajta módszert, amely nem tesz különbséget az egyes fotonok között [8]. Ez az eljárás egy új statisztikai eloszláshoz vezetett, amely pontosan leírta a kísérletek során megfigyelt eredményeket. Az eljárást később Einstein általánosította anyagi részecskékre is, így született meg a ma Bose–Einstein eloszlásként ismert eloszlás, amely a statisztikus fizika egyik alapkövét képezi [9].

A kvantummechanika értelmében két részecske hullámfüggvénye (térbeli detektálásuk valószínűségének sűrűségfüggvénye) a következő formában írható fel:

$$\Psi_{12}^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1^A \psi_2^B \pm \psi_1^B \psi_2^A \right), \tag{1.8}$$

ahol $|\psi_i^K|^2$ jelöli az i-dik részecske (pl. foton) detektálásának valószínűségét a K jelű detektorban. Szimmetriáról vagy antiszimmetriáról beszélünk, ha a (1.9)-es kifejezésben rendre plusz vagy mínusz szerepel. Ennek megfelelően nevezzük a részecskéket rendre bozonnak (pl. foton, pion) vagy fermionnak (pl. elektron, proton). Mindez azt jelenti, hogy az észlelési valószínűségeknek szimmetrikusnak kell lenniük. Más szóval a kvantummechanikában a részecskék megkülönböztethetetlenek.

Alkalmazva ezt, HBT-effektus esetén nem eldönthető, hogy melyik részecskét (pl. foton, pion stb.) melyik detektor (A,B) detektálta. Az egyrészecskés Schrödinger-egyenlet megoldása szerint egy részecske (pontosabban részecske nyaláb) hullámfüggvénye koordináta reprezentációban:

$$\psi_1^A(\vec{r}_{1A}) = e^{i\vec{k}\vec{r}_{1A}+\phi_1}, \text{ és } \psi_2^B(\vec{r}_{2B}) = e^{i\vec{k}\vec{r}_{2B}+\phi_2}, \tag{1.9}$$

ahol ϕ_i az i. részecske kezdeti fázisa, r_{iA} az i. forrásától az A detektorba mutató helyvektor és $\vec{k}$ a részecskék hullámszámvektora, ami a részecskék $\vec{p}$ impulzusával van $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ kapcsolatban.[1] Tehát az egyrészecske hullámfüggvények egy síkhullámként írhatók le. Matematikailag a klasszikushoz hasonló módon felírva egy HBT-effektusban részt vevő két független bozon észlelési valószínűségét egy detektorokban láthatóvá válik, hogy egy valószínűségi interferenciája jön létre a két részecske észlelésének. A valószínűségekkel felírt korrelációs függvényben a korrelációt mutató tagra a klasszikus esetben kapott (1.7a) alak adódik egy 1/2-es faktor erejéig:

$$\frac{P(A,B)}{P(A)P(B)} = \frac{1}{2}\left\langle |\psi_1^A\psi_2^B + \psi_2^A\psi_1^B|^2 \right\rangle \approx 1 + cos\left(k\frac{Rd}{L}\right), \tag{1.10}$$

ahol a $\langle\rangle$ a fázisdiagramra vett termikus átlagot, P(K) a K detektorban való észlelését két részecskének és P(A,B) az A és B detektorokban való észlelési valószínűsége a két részecskének.

[1] Itt a $\vec{x}$ jelölésnél ellátott vektorok 3 dimenziósnak vagy akár 4 dimenziósnak is tekinthetőek

1.2.3. A Bose-Einstein korreláció és a femtoszkópia

A továbbiakban, amennyiben más jelzésre nem hívjuk fel a figyelmet minden kis r, k, ρ, q, és K betűk a Minkowski-térben vett négyesvektorokat jelölnek, és vastagon szedett betűkkel jelöljük a térkoordinátákat [10].

Ha egy olyan térben és időben kiterjedt $S(r,k)$ forrásfüggvénnyel jellemzett forrásunk van, - ami megmondja, hogy adott helyen és időben mekkora valószínűséggel és mekkora impulzussal bocsát ki a forrás egy részecskét - akkor a kétrészecske hullámfüggvény az eddigiekhez hasonlóan a következőképpen írható fel :

$$\Psi_2(r_1,r_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ik_1r_1}e^{ik_2r_2} + e^{ik_1r_2}e^{ik_2r_1}\right), \tag{1.11}$$

ahol r_i és k_i az i-dik részecske téridőbeli pontja és hullámszáma (impulzusa).

Figyelembe véve a forrás eloszlását és a kvantummechanikai hullámterjedést, a k_1-nek és k_2-nek megfelelő impulzussal észlelhető részecskepárok előfordulási száma felírható:

$$N_2(k_1,k_2) = \int S(r_1,k_1)\cdot S(r_2,k_2)\cdot \left|\Psi_2(r_1,r_2)\right|^2 d^4r_1\, d^4r_2. \tag{1.12}$$

A egyenként észlelhető k_1 hullámszámú részecske hullámfüggvénye és előfordulási száma pedig az alábbi egyenletekkel írható le:

$$\Psi_1(r) = e^{ikr}, \tag{1.13a}$$

$$N_1(k) = \int S(r,k)|\Psi_1(r)|^2\, d^4r. \tag{1.13b}$$

A korrelációs függvény ezen részecskeszámok alapján ismét felírható:

$$C_2(k_1,k_2) = \frac{N_2(k_1,k_2)}{N_1(k_1)N_1(k_2)}. \tag{1.14}$$

Vezessük be a $q = p_1 - p_2$ és $K = (p_1+p_2)/2$ négyesimpulzus különbséget és átlagot, valamint vegyük az $S(r,k)$ Fourier-transzformáltat:

$$\tilde{S}(q,K) = \int S(r,K)e^{iqr}\, d^4r, \tag{1.15}$$

Így kis impulzuskülönbségű részecskék korrelációs függvényére a következők adódnak:

$$\begin{aligned} C_2(q,K) &= \int S\left(r_1, K+\frac{q}{2}\right) S\left(r_2, K-\frac{q}{2}\right) \left|\Psi_2(r_1,r_2)\right|^2 d^4r_1\, d^4r_2 \\ &\cong 1 + \left|\int S\left(r,K\right) e^{iqr}\, d^4r\right|^2 \\ &= 1 + \left|\frac{\tilde{S}(q,K)}{\tilde{S}(0,K)}\right|^2. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Kihasználtuk a (1.16)-os felírásnál, hogy az ALICE, STAR, PHENIX [11–13] kísérleti eredményei szerint az emissziós zóna (aminek méretét az S(x,K) eloszlásfüggvény szerint vett szórása határoz meg a helynek) mérete és szerkezete nem ugrásszerűen érzékeny arra, hogy egy részecske pontosan mekkora átlagos impulzussal távozott. Ezért kis q-k esetén használjuk a $k_1 \approx k_2 \approx K$ átlagos négyes impulzus közelítést [14]. Érdemes észrevenni, hogy a korrelációs képletben az $S(r)$ Fourier-transzformáltja szerepel, aminek szélessége a q térben annál nagyobb minél szélesebb az $S(r)$. Ez azt is jelenti, hogy minél nagyobb a két részecske keletkezési helye térben és időben, annál kisebb relatív impulzuskülönbségre jön létre korreláció. Erre a későbbiekben erősen fogunk támaszkodni.

A Bose-Einstein korreláció végleges alakjához be kell vezetni a páreloszlás függvényt mely két részecske relatív térbeli eloszlását mutatja:

$$D(r,K) = \int S\left(\rho + \frac{r}{2}, K\right) \cdot S\left(\rho - \frac{r}{2}, K\right) d^4\rho, \tag{1.17}$$

ahol r a pár négyestávolsága és ρ az átlagos négyesvektor. Ezt helyettesítve a (1.16)-os egyenletbe a Bose-Einstein korreláció végleges formája kapható meg:

$$C_2(q,K) \cong \int D(r,K)|\Psi_2(r)|^2 \, d^4r = 1 + \int D(r,K)e^{iqr} \, dr = 1 + \tilde{D}(q). \tag{1.18}$$

Tehát a Bose-Einstein korrelációs függvény a $D(r,K)$ páreloszlást adja meg és ezt lehet rekonstruálni a $C(q,K)$ mérésével.

Az eredmény tehát azt fejezi ki, hogy a forrás kezdeti geometriájából következtethetünk a detektáláskor megjelenő korrelációkra a részecskék között és fordítva. Ezt tehát felfoghatjuk úgy, mint egy olyan mikroszkópot, amivel meg tudjuk vizsgálni a forrás geometriáját. Itt fontos még kihangsúlyozni, hogy a kapott eredményben nincsenek figyelembe véve a részecskék között fennálló más interakciók, mint például az erős és elektromágneses (Coulomb) kölcsönhatás. A továbbiakban egy skálázást elvégzünk és a c fénysebességet vesszük egységnek.

1.3. Femtoszkópia a nagyenergiás nehézion-ütközésekben

1.3.1. A megfelelő koordinátázás

A korrelációs függvény vizsgálatának kulcsa a megfelelő koordináták és változók megválasztása, ugyanis ezek alapján lehet fizikai információt kinyerni a részecskeforrás téridőbeli szerkezetéről és az emissziós folyamatokról.

A (1.16)-os és (1.18)-as eredményekben a változók mind négyesvektorok voltak a téridőben. Azonos tömegű részecskék esetén azonban egyszerűsödik a kép, ugyanis ekkor igaz a négyes impulzusok négyzetére, hogy $p_1^2 = m^2 = p_2^2$. Így felírva q és K Lorentz-szorzatát:

$$p_\mu K^\mu = q_0 K_0 - \boldsymbol{qK} = (p_1 - p_2)\frac{(p_1 + p_2)}{2} = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) = 0, \tag{1.19}$$

ahol p_0 és K_0 jelöli p és K időfüggését, a felső és alsó indexes μ-k jelölik rendre a kontra- és kovariáns vektorokat. Látható így, hogy

$$q_0 = \boldsymbol{q}\frac{\boldsymbol{K}}{K_0} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{\beta}, \quad \text{ahol} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{K}}{K_0}, \tag{1.20}$$

vagyis a C_2 függvény kifejezhető térkoordinátákkal. Az gyakorlati eljárás az, hogy a korrelációs függvényt $\boldsymbol{q}$ függvényében parametrizáljuk majd a paramétereket $\boldsymbol{K}$ szerinti osztályok alapján vizsgáljuk.

Azokon a helyeken, amikhez közel a tömegközépponti rendszerben a nyalábirányba való mozgása a részecskéknek elhanyagolható a részecske ún. rapiditása nulla. A rapiditást az (az ütközés előtti z irányú impulzus miatt) $y = arctan(q_z/E)$ egyenlet definiálja, ahol E a részecske összenergiája [15]. Az $y = 0$ értéket midrapiditásnak nevezzük és ehhez közel a $\boldsymbol{K}$ függést felváltja az ún. átlagos transzverz impulzus- vagy transzverz tömegfüggés, melyek definícióit rendre a (1.21a) és (1.21b) képletek adják meg.

$$K_T = \frac{1}{2}\sqrt{K_x^2 + K_y^2}, \tag{1.21a}$$

$$m_T = \sqrt{m^2 + K_T^2}, \tag{1.21b}$$

ahol m a vizsgált részecske tömege, K_x és K_y az ütközési (transzverz) síkban vett átlagos transzverz impulzus-komponensek (lásd a transzverz impulzust p_T jelöléssel a 2. ábrán). A laborkoordináta-rendszer szerinti x-irány a két ütköző ion középpontjai közötti eltolás iránya, y-irány pedig az erre merőleges, ami nem a nyalábirány. A nyalábirányt z iránynak értjük. Általában áttérünk az ún. Bertsch-Pratt-koordinátákra $\boldsymbol{q}$ felírásakor [16], ami egy forgatást jelent a transzverz síkban. Definíció szerint ez így néz ki:

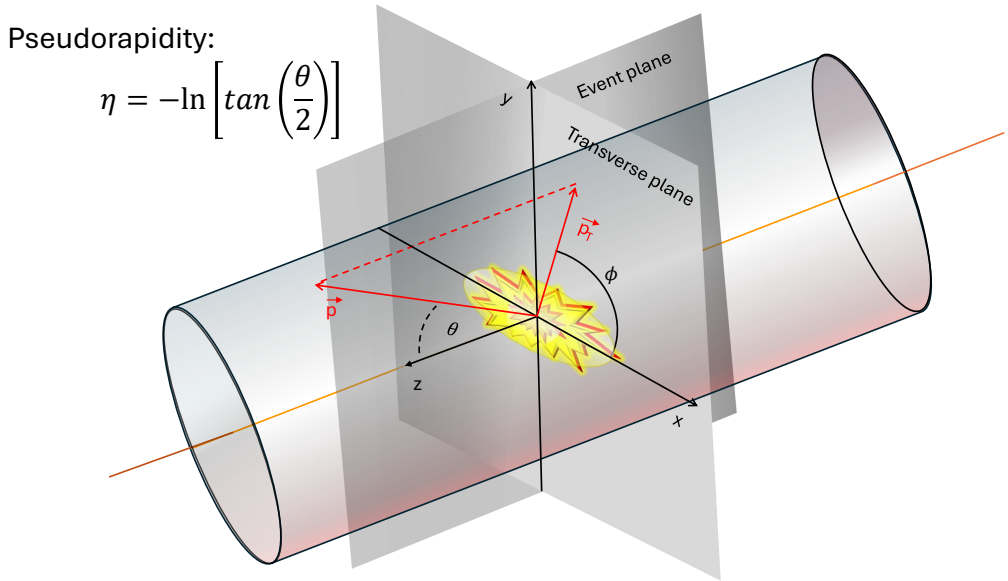
$$\boldsymbol{q}_{BP} \stackrel{\text{def}}{=} (q_{out}, q_{side}, q_{long}), \tag{1.22}$$

ahol q_{long} koordináta mutat a nyaláb irányába, q_{out} az átlagos transzverz impulzus irányába és a q_{side} az utóbbi kettőre merőleges irányba. Ez a választás akkor könnyíti meg a számolást, ha a longitudinálisan együttmozgó (LCMS) rendszerben írjuk fel a transzverz impulzust. Ugyanis ekkor $K_{BP} = (K_T, 0, 0)$ és így

$$q_0 = q_{out}\frac{K_T}{K_0} = q_{out}\beta \quad \text{ahol} \quad \beta = \frac{K_T}{K_0} \tag{1.23}$$

Tehát a forrás időfüggése az átlagos transzverz impulzus irányába mutat. További előny, hogy az LCMS rendszerben a korrelációs függvények vizsgált tartomány közelítőleg gömbszimmetrikus [14].

Bár a BP-koordináták háromdimenziós korrelációkat írnak le, ezek mérése gyakran statisztikai korlátokba ütközik. Ezért sokszor egyváltozós korrelációs függvényeket használnak. Ennek megválasztása problémafüggő. Bizonyos esetekben (mint például a jelen dolgozatban is vizsgált Pb-Pb-ütközések esetén) erre az LCMS-beli hármasimpulzus abszolútértéke a megfelelő egydimenziós választás az ütközések leírásához. Ez a



2. ábra. A transzverz sík az a sík, amely merőleges a részecskefizikai ütközések nyalábirányára (általában a z-tengely). Ebben a síkban a részecske transzverz impulzusa (p_T) az x és y komponensekből áll. Az azimutális szög (ϕ) pedig az a szög, amelyet a transzverz impulzus vektora bezár az x-tengellyel.

laborkoordinátákkal a következőképpen írható fel:

$$|\boldsymbol{q}_{LCMS}| = \sqrt{(p_{1x} - p_{2x})^2 + (p_{1y} - p_{2y})^2 + q^2_{z,\mathrm{LCMS}}}, \text{ ahol} \tag{1.24a}$$

$$q^2_{z,\mathrm{LCMS}} = \frac{4(p_{1z}E_2 - p_{2z}E_1)^2}{(E_1 + E_2)^2 - (p_{1z} + p_{2z})^2}. \tag{1.24b}$$

Azonban más esetekben ez nem megfelelő (például ez elektron-proton ütközések esetén vagy a térben az impulzussal egyenesen arányos középpontú Dirac-delta és sajátidőben egyoldalú Lévy-eloszlású forrás esetén) és a pár együttmozgó koordinátarendszerében (PCMS) vett hármasimpulzus különbség abszolút értéke bizonyul a megfelelő egydimenziós választásnak [14]. Ezt invariáns momentumnak is nevezzük, ugyanis ezen abszolútértékek Lorentz-invariánsak [15]. Ez a labor- és az LCMS-koordinátákkal felírható, mint:

$$q_{inv} = \sqrt{\boldsymbol{q^2} - (E_1 - E_2)^2} = \sqrt{(1 - \beta_t^2)q^2_{out} + q^2_{long} + q^2_{side}}, \tag{1.25}$$

ahol $\beta_t = 2K_T/(E_1+E_2)$ az átlagos transzverz sebesség és E_i az i-edi részecske energiája

Tehát a háttérben zajló fizikai folyamatok alapvetően befolyásolják a korrelációs függvény változóját és az adatfeldolgozás első lépése tehát megtalálni a legjobb egyváltozós kinematikai mennyiségét a korrelációs függvénynek. A következők viszont függetlenek lesznek ezen mennyiség megválasztásától, így q-val jelöljük az általános impulzuskülönbséget.

Egy fontos impulzus irányt jellemző mennyiség a pszeudorapiditás, amit (sajnos ezt is) η-val szokás jelölni. Ez egy részecske impulzusának (és nem a transzverz impulzusának) és a nyalábirány által bezárt szög (un pólusszög) tangensének a természetes alapú logaritmusaként van definiálva (lásd 2. ábra). Ezen furcsa definíció előnye, hogy így ez a mennyiség Lorentz-invariáns marad a z-tengely mentén. Ennek magyarázatához nézzünk egy a laborkoordináta-rendszerhez képest z (sugárirányú) irányú sebességgel mozgó koordináta-rendszert. Mivel a pszeudorapiditás tangense lényegében egy transzverz (keresztirányú) távolság osztva egy longitudinális (hosszanti) távolsággal ezért egy hosszanti tengely menti Lorentz-transzformáció alatt egy γ-s faktorral[2] transzformálódik. [15]. A logaritmust véve a gamma szorzó kihozható egy külön tagként, ami kiesik ha ki vesszük két részecske pszeudorapiditás a különbségét.

1.3.2. Miért van glóriája egy hadronforrásnak?

A (1.16)-os egyenlet szerint ha vesszük a $q \to 0$ határesetet, akkor a korrelációs függvénynek $C(q = 0, K) = 2$ értékhez kell tartania.

Kísérletileg sajnos ezen határesetet elérését a műszerek felbontása bekorlátozza. Az észlelhető legkisebb impulzuskülönbség ugyanis a részecskék impulzusától függően körülbelül $q_{min} \approx 3$–$4\ MeV$ a legjobb esetben. Így a legnagyobb mérettartomány, ahonnan a keletkező részecskék közötti korrelációt detektálni lehet $R_{max} \approx \hbar/q_{min} \approx 50$–$60\ fm$. Ennél nagyobb forrást kísérletileg nem lehet detektálni. Ezért, ahhoz hogy megtudjuk, hogy mi történik a $q \to 0$ határesetben extrapolálnunk kell a legkisebb mért q_{min} értéktőé. Az extrapolált értéket a következőképpen definiáljuk:

$$\lim_{q \to 0} C_2(q, K) = 1 + \lambda(K). \tag{1.26}$$

A legtöbb mérésben ez a λ érték kisebbnek adódik mint 1 [1]. Mivel minden ilyen adatanalízis esetén lehet definiálni egy ilyen R_{max}-ot, aminél szélesebb tartományban keletkező részecskék közötti korrelációt már nem lehet kísérletileg megmérni, ezért ez a megfigyelés vezetett a mag-glória modell megalkotásához [17].

A modell a részecske emittáló forrást két részre bontja: egy hidrodinamikai viselkedést mutató tűzgolyó szerűen táguló magra, mely közvetlenül keltett részecskéket bocsát ki, és egy azt burkoló glóriára. Ez utóbbi olyan „átmeneti”, instabil részecskékből, amik köztes állapotként jelennek meg és további részecskékre bomlanak miután eltávolodtak az ütközési zónától. Ezeket hosszú élettartalmú rezonanciáknak nevezzük. Egy rezonancia általában rövid élettartalmú és gyorsan elbomlik (ezek a magban is jelenlévő rezonanciák). Ezzel szemben a hosszú élettartalmú rezonanciák akár bizonyos hadronoknál (pl. pion vagy mezon) is hosszabb életűek lehetnek (pl. K^0s, η^0, η').

Ez a kép különösen fontos a piontermelés szempontjából: több hosszú életű rezonancia, amelyek bomlási szélessége ($\Gamma = \hbar/\tau$, ahol τ az élettartam ideje) kisebb vagy hasonló a detektor által felbontható legkisebb impulzuskülönbség értékéhez pionokra

[2] Itt a gamma a Lorentz faktort jelenti, azaz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

bomlanak, amelyek a glória régióhoz járulnak hozzá. Az ilyen tartományokban keletkező pionok korrelációs járulékát, azonban nem tudjuk már figyelembe venni, mert a korrelációs függvényben szereplő Fourier-transzformációban ezek a megfigyelhető legkisebb impulzuskülönbség alá transzformálódnak. Ez magyarázhatja a $\lambda < 1$ eredményeket.

Ezt matematikailag úgy lehet figyelembe venni, hogy a részecske a forrásfüggvényt felosztjuk két függvény összegére (a linearitást megtartva) $S(x,K) = S_m(x,L) + Sg(x,K)$. Így felírható a mag ($N_m$) és a glória ($N_g$) által kibocsátott részecskeszám ezen függvények téridőre vett integráljaként:

$$N_m(K) = \int S_m(x,K) d^4x = \tilde{S}_m(0,K), \tag{1.27a}$$

$$N_g(K) = \int S_g(x,K) d^4x = \tilde{S}_g(0,K), \tag{1.27b}$$

ahol a felül vont hullám jelzi Fourier-transzformáltat. Tehát felírható, hogy

$$\tilde{S}(0,K) = \tilde{S}_m(0,K) + \tilde{S}_g(K) = N_m(K) + N_g(K), \tag{1.28}$$

ahol kihasználtuk, hogy a Fourier-transzformáció lineáris. Ha most még felhasználjuk azt az eredményt, hogy a detektálható q értékekre $\tilde{S}(q,K) \simeq \tilde{S}(q,K)$, akkor a következő adódik a (1.16)-os eredményre:

$$\begin{aligned} C_2(q,K) &\simeq 1 + \left| \frac{\tilde{S}_m(q,K)}{\tilde{S}_m(0,K)} \frac{\tilde{S}_m(0,K)}{\tilde{S}(0,K)} \right|^2 = 1 + \left(\frac{N_m(K)}{N_m(K) + N_g(K)} \right)^2 \left| \frac{\tilde{S}_m(q,K)}{\tilde{S}_m(0,K)} \right|^2 \\ &= 1 + \lambda \left| \frac{\tilde{S}_m(q,K)}{\tilde{S}_m(0,K)} \right|^2 \stackrel{def}{=} 1 + f_c^2 \left| \frac{\tilde{S}_m(q,K)}{\tilde{S}_m(0,K)} \right|^2, \end{aligned} \tag{1.29}$$

ahol definiáltuk az $f_c^2 = \lambda$ mag járulékot [17].

Érdemes észre venni, hogy az (1.17)-es páreloszlás függvény a mag-glória modellben már 3 részre esik szét: mag-mag, mag-glória, glória-glória párokat kell vizsgálni. Viszont ebben csak a mag-mag komponens lesz releváns, tehát az (1.18)-as egyenlet hasonlóan az előzőkhöz a következőképpen fejezhető ki λ-val:

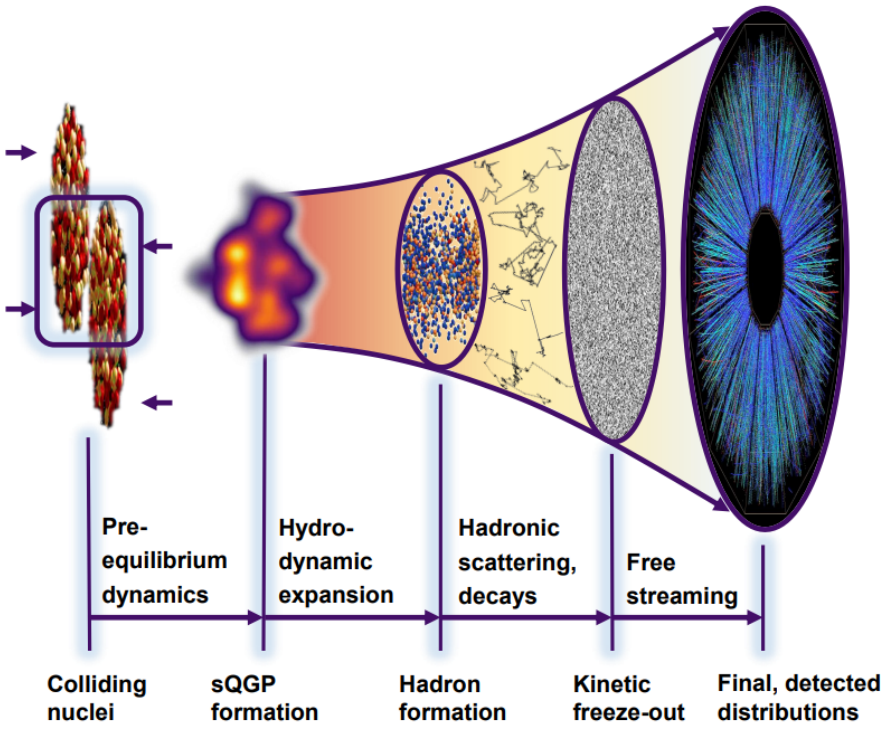
$$C_2(q,K) \simeq 1 + \lambda \frac{\tilde{D}_{(m,m)}(q,K)}{\tilde{D}_{m,m}(0,K)}, \tag{1.30}$$

ahol a $\tilde{D}_{(m,m)}(0,K)$ jelzi a megfelelő mag-mag komponens Fourier transzformációját.

A λ a kétrészecske korrelációs függvény kiindulási értéke, amely fontos információt hordoz az összefüggő piontermelésről, azaz hogy a pionok mekkora része származik koherens vagy rezonancia eredetű forrásból. Értékét torzíthatják a hosszú élettartamú rezonanciák, például az μ' mezon bomlásai [14].

1.3.3. A „szuperfolyadék” kvarkanyag

Az előzőek a rendszer hadronizáció során kialakult állapotokról szóltak. Mielőtt rátérnék egy ilyen hadronforrás geometriai tárgyalására szeretnék pár eredményt - és ezzel együtt a későbbiekben használt alapvető fogalmat - ismertetni az elmúlt évekből a hadronizáció előtti QGP közeg felfedezésével volt kapcsolatos. Ez az állapot, amiből később kialakul a mag-glória állapot, ahogy azt a 3. ábra is illusztrálja.



3. ábra. Nagyenergiájú nehézion-ütközések sematikus illusztrációja. Az időfejlődés dinamikáját vízszintesen irányuló nyilak szemléltetik, míg a rendszer karakterisztikus állapotváltozásait függőleges vonalak jelölik. Az ábra forrása: lásd [18].

Az ütközés során az atommagok pályái nem mindig tökéletesen egymással szemben haladnak, ezért bevezetjük a centralitás fogalmát. A centralitás százalékos mérőszámként azt fejezi ki, hogy milyen mértékben periférikus az ütköző magok átfedése. Minél nagyobb százalékos a centralitás, annál periférikusabb az ütközés, azaz annál kevésbé fednek át a magok. Az üközések után a nem átfedő maradék atommagok része tovább halad, a központi régióban azonban óriási energia koncentrálódik.

Nem teljesen centrális ütközések esetén a keletkező sűrű plazma kezdeti geometriája elliptikus aszimmetriát mutat az ütköző ionok mozgására merőleges $x-y$ transzverz síkban (míg az erre merőleges, kezdeti impulzusokat tartalmazó $x-z$ sík az eseménysík). Ezen asszimmetria impulzuseloszlásában történő megjelenését a transzverz impulzus transzverz síkbeli azimutszög (lásd 2. ábrán ϕ-vel jelölve) szerinti Fourier-sorfejtésében

szereplő együtthatók figyelésével lehet vizsgálni. Ezen együttható közül kettőt kiemelünk, amiknek külön neve is van: az elliptikus folyás v_2 és v_4 harmonikus folyás vagy negyed rendű anizotróp áramlás. A kísérletek kimutatták ezen együtthatók el nem hanyagolhatóságát ami ennek a plazmának a folyadék jellegű viselkedésére valamint a belső súrlódásának extrém kis jellegére mutatott rá [19–21].

Az ütközés során az atommagban lévő nukleonok páronként összeütköznek, ún. bináris ütközéseket produkálva. Az így keletkező részecskék száma (N_{AA}) az ionok ütközése során arányos a proton-proton ütközésekben keletkező részecskék számának (N_{pp}) és a bináris nukleon-nukleon ütközések számának szorzatával (N_{bin}). Ezek alapján következő, (1.31)-es képlettel definiált mennyiséget mag-módosulási faktornak nevezzük:

$$R_{AA} = \frac{\langle N_{AA} \rangle}{\langle N_{bin} \rangle \langle N_{pp} \rangle}, \tag{1.31}$$

Ha az atommag-ütközések egyszerű nukleon-nukleon ütközések összességeként fogható fel, akkor R_{AA} értékének 1-nek kellene lennie. A kutatásokból kiderült, hogy ez nem felel meg a kísérleti eredményeknek csak fotonok esetén [22]. Az anyag tehát femtométeres tartományban elnyeli a nem fotonszerű részecskéket, tehát erősen kölcsönható. Az is kiderült a későbbiekben, hogy ez az eltérés kisebb energiájú ütközések és perifériku ütközések esetén eltűnik [23]. Ez a folyamat létrejöttéhez szükséges minimális ütközési energia megtalálása a mai napig aktív kutatás, amire pontos eredmények még nincsenek. Plusz megfigyelésre került az is, hogy a keletkező részecskék mozgási energiája követi a méltán híres e^{-E/k_BT} Boltzmann-eloszlást.

A fotonok közül megkülönböztetünk ún. direkt fotonokat, amik a hőmérsékletről tesznek tanúvallomást a mérésük során. Ezen fotonok megkülönböztetése azon fotonoktó, melyek hadronok bomlása során keletkeznek nem egy egyszerű feladat,de a PHENIX kísérleteiben sikerült ezt is kivitelezni. Ezen fotonok spektrumát vizsgálva kiderült, hogy a kezdeti hőmérséklet legalább $T_{init} \gtrsim 370\ MeV$ vagyis ez $\gtrsim 4 \cdot 10^{14}\ K$[24].

Azt is megmutatták, hogy a plazmában megjelennek a kvark szabadsági fokok is [25]. Ez azt jelenti, hogy a keletkező hadronok elliptikus folyása és energiája is az alkotó kvarkok számával skáláz. Vagyis a szabadsági fokokat a kifagyás előtti közegben a kvarkok hordozzák. Összességében tehát elmondható, hogy a nehézion-ütközésekben létrejövő anyag erősen kölcsönható, folyadék halmazállapotú, elhanyagolható kinematikai viszkozitású, kezdetben extrém magas hőmérsékletű és kvark szabadsági fokokat tartalmaz. Ezt nevezzük az eddigiekben már sokat emlegetett QGP állapotnak pontosan.

Érdemes itt egy pár szót szólni arról, hogy a QGP→hadrongáz fázisátalakulás elméletileg egy „*átmenet jellegű*” (angolul „*cross-over*”) átalakulás, ahol a rendszer tulajdonságai fokozottan változnak és nincs jól definiált kritikus hőmérséklet vagy átmeneti tartomány magas barionsűrűség (három kvarkból álló hadronok, mint pl. proton, neutron) esetén. Nincs szingularitás vagy szakadás a szabadenergia deriváltjaiban. Feltételezések szerint kell lennie egy kritikus pontnak (CEP), ahol ez a fázisátmenet már egyes típusú. Ehhez kis energiával való ütköztetések eredményét vizsgálják és a mai napig szintén kérdéses ennek léte.

Itt meg jegyezzük, hogy ez a fejezet egy nagyon tömör összefoglalás volt és az olvasó részletesebb információkért a már előzőekben is forrásként jelölt [14] doktori értekezés 1.4-es fejezetéhez fordulhat. A továbbiakban ebben a dolgozatban visszatérünk a fázisátalakulás utáni állapotok leírására. Azon belül is a hadronforrás geometriai leírására, amiből fontos következtetéseket vonhatunk le a CEP mérésével kapcsolatban.

1.3.4. Lévy-forrás

Sokáig azzal a közelítésekkel végezték el a méréseket és számításokat, hogy az $S(r, K)$ függvény időben és térben egyszerű Gauss-eloszlást követ, amiből eredő korrelációs függvény szintén Gauss-alakot vesz fel, melyből az R homogenitási sugarak (vagyis azon sugarak, ahol adott K_T impulzusú részecskék létrejönnek) meghatározhatóak. A Fourier-transzformált tehát felírható, hogy

$$S(r) \propto e^{-\frac{r^2}{(2R)^2}} \implies \tilde{S}(q, K) \propto e^{-\frac{q^2 R^2}{2}}, \tag{1.32}$$

amiből a korrelációs függvény már adódik az (1.29)-as képletbe való helyettesítéssel

$$C_2(q, K) = 1 + \lambda e^{\frac{-q^2 R^2}{2}} \tag{1.33}$$

Ez a közelítés azért tűnt megfelelőnek mivel az ún. centrális határeloszlás-tétel szerint ha egy fizikai mennyiség (például a részecske helyzete Brown-mozgásban vagy a részecskekibocsátási pozíció egy ütközés során) sok független, véletlenszerű lépés összegeként alakul ki, akkor az eloszlása közelítőleg Gauss-jellegű lesz. Azonban ez csak annyiban igaz, amennyiben a lépéseknek véges szórása van.

Amint azt a korábbiakban is tárgyaltuk a forrás egy táguló tűzgolyóként írható le. Egy ilyen tűzgömbben a részecskekibocsátási pozíciók szórása akár lehet végtelen is. Így tehát a Gauss-eloszlás nem vezethet pontos eredményre, aminek bizonyítékát már több precíziós mérés is kimutatta [26, 27]. Kiderült, hogy a megfigyelt eloszlások nagy impulzuskülönbségekre hatványszerű lecsengést mutat. Az általánosított határeloszlási-tétel ebben az esetben azt mondja ki, hogy az összeg Lévy-eloszlást ad, amit a Gauss-eloszlás általánosításaként lehet felfogni. Ennek háromdimenziós, gömbszimmetrikus zárt alakját egy Fourier-transzformáció definiálja:

$$\mathcal{L}(\alpha, R, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} e^{-\frac{1}{2}|\boldsymbol{q}R|^\alpha}, \tag{1.34}$$

ahol R az un Lévy-skála paraméter, mely megegyezik a HBT-sugarakkal, α pedig a Lévy- vagy stabilitási index. Ha $\alpha < 2$, akkor ennek a függvénynek a lecsengése hatványszerű, és erre három dimenzióban igaz, hogy:

$$\lim_{(r/R)\to\infty} \mathcal{L}(\alpha < 2, R, \boldsymbol{r}) = \mathcal{W}(r/R)^{-3-\alpha}, \tag{1.35}$$

ahol $\mathcal{W}$ egy arányosági tényező és $r = |\boldsymbol{r}|$. Ebből következik, hogy

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \, \mathcal{L}(\boldsymbol{r}) \, d^3r \sim \int_0^\infty dr \; r^4 \; \frac{1}{r^{3+\alpha}} = \int_0^\infty dr \; r^{1-\alpha}. \tag{1.36}$$

Ez csak akkor konvergens, ha $\alpha > 2$, tehát ellenkező esetben nem értelmezhető a második momentum és így a szórásnégyzet sem. Viszont R itt is a forrásméret egy jellemzője és a Lévy-eloszlás integrálja létezik és R^3-el megy.

Érdemes megjegyezni, hogy ha S_m Lévy eloszlású, akkor a mag-mag páreloszlás is az, mert az autokorrelációja két azonos indexű Lévy-eloszlásnak is Lévy eloszlás:

$$D_{(mm)}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{L}(\alpha, 2^{\frac{1}{\alpha}} R, \boldsymbol{r}). \tag{1.37}$$

Azt a folyamatot, amikor az elemi lépések szórása egy diszkrétnek tekinthető mozgás esetén nem véges anomális diffúziónak vagy Lévy-repülésnek nevezzük. A Lévy-eloszlás segít általánosabb alakot adni a forrásfüggvénynek és jobban kezelhetővé teszi a λ paramétert. Valamint lehetővé tesz Gauss-forrás ellenőrzést is, mivel $\alpha = 2$ esetben abból a három dimenziós Gauss-eloszlás adódik.

A Lévy-eloszlás α paramétere összefüggésben áll a másodrendű fázisátalakulások η kritikus kitevőjével, amely a korreláció kritikus hőmérséklet közeli hatványszerű viselkedésének egy kitevője a térben. és megadja a korreláció változásának mértékét a részecske helyének változtatásával ott. Ha valóban létezik egy kritikus végpont (CEP) a kvark–hadron átmenet fázisdiagramján, akkor annak közelében a Lévy-forrás α értéke jellemző módon változik [28]. Ezért fontos különböző ütközési rendszerekben mérni az α értéket, hogy segítsen lokalizálni a CEP-et. Jelen dolgozatnak fő céljai közé tartozik ezen paraméter mérésének bemutatása.

Érdemes itt még megjegyezni, hogy az egyik legfrissebb eredmények közé tartozik, hogy a a nagyenergiás nehézion-ütközések Monte-Carlo szimulációival megmutatták, a szimulált pion kifagyási eloszlások valóban leírhatók egy háromdimenziós, ellipszoid kontúros, szimmetrikus Lévy-eloszlással [18].

1.3.5. Coulomb-effektus

Az előzőekben mind figyelmen kívül hagytuk a Coulomb-effektust a korreláció felírásakor így ez megfelelően leírhatóvá vált a semleges pionok és fotonok leírása. Azonban a pionok lehetnek pozitívak, negatívak is a bennük lévő kvark-antikvark elosztás alapján. Ezeket könnyebb megfigyelni, ugyanis a semleges fotonokból kiválasztani azokat, amik közvetlenül és nem a részecskék bomlásával keletkeznek. A semleges pionok meg elbomlanak fotonokra. Érdemes tehát felírni a korrelációs függvényt a Coulomb effektus figyelembe vételével is.

Ennek felírásához írni fel a Coulomb-potenciállal kiegészített kétrészecske Schrödinger-egyenletet. Erre két m tömeggel rendelkező $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ helyen lévő részecskék esetén a tömegközépponti koordináta rendszerben a következő adódik:

$$-\frac{\hbar^2}{4m}(\Delta_{\boldsymbol{R}} + 2\Delta_{\boldsymbol{r}})\Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) = E\Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}), \tag{1.38}$$

ahol $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$ és $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. Ebbe a koordináta-rendszerbe való áttérésnél nem történik mértékváltás az integrálás során, tehát a korrelációs függvényt ez nem befolyásolja. Azonban így szeparálható egyenletet kapunk, azaz felírható a megoldás

egy $\boldsymbol{R}$ függő és egy $\boldsymbol{r}$ függő $\boldsymbol{\Psi_r(r)}$ megoldás szorzataként. Behelyettesítve ezen két függvény szorzatát és leosztva azzal adódik

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\Delta_{\boldsymbol{R}}\Psi_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R})}{\Psi_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R})}+2\frac{\Delta_{\boldsymbol{r}}\Psi_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r})}{\Psi_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r})}\right]+V(\boldsymbol{r})=E. \tag{1.39}$$

Ez két független rész összege, tehát az E szétválasztható $E = E_{\boldsymbol{R}} + E_{\boldsymbol{r}}$ szerint és a tagokat külön-külön egyenlővé lehet tenni az egyes az egyenlet $\boldsymbol{R}$ és $\boldsymbol{r}$ függő részével. Az $\boldsymbol{R}$-re vonatkozó részt vegyük $\Psi_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}) = e^{i2\boldsymbol{KR}}$ síkhullám alakban, ahol $\boldsymbol{K}$ az átlagos impulzus[3]. Így adódik , hogy $E_{\boldsymbol{R}} = \hbar^2K^2/m$, ahogy azt várnánk is az átlagos impulzustól. A relatív koordinátára vonatkozó egyenlet pedig a következő:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\boldsymbol{r}}\Psi_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r})+V(\boldsymbol{r})\Psi_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r})=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\Psi_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}), \tag{1.40}$$

ahol intuitív módon alapján bevezettük az $E_{\boldsymbol{r}} = \hbar^2\boldsymbol{k^2}/2m$ formát, ahol $\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)/2 = \boldsymbol{q}_{PCMS}/2$ a pár tömegközépponti relatív impulzusa. Ez egy szokásos egyrészecske Schrödinger-egyenlet a relatív mozgásra. Ennek megoldása ismert, gömbi koordinátákba való felírással melynek radiális függvény az ún. konfluens hipergeometrikus függvény (vagy Kummer-függvény), amit itt F-el jelölünk[29]. A megoldás síkhullám alakja tehát a PCMS rendzserben (vagyis a pár tömegközépponti rendszer, ahol $\boldsymbol{K} = 0$) [14, 30]:

$$\Psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})=\frac{\Gamma(1+i\eta_C)}{e^{\pi\eta_C/2}}e^{i\boldsymbol{kr}}F(-i\eta_C,1,i(k)), \tag{1.41}$$

ahol $\eta = mc^2\alpha/2\hbar ck$ az ún. Coulomb paraméter, $k = |\boldsymbol{k}|$, Γ a normalizálásból jövő Gamma-függvény, $\mathbf{q}$ a $\mathbf{q}_{PCMS}$-re utal és $\alpha \approx 1/137$ pedig a finomszerkezeti állandó., ami az elektromágneses kölcsönhatás erősségét jellemzi[4]

Ezt a Bose-Einstein korreláció miatt szimmetrizálni kell, majd a mag-glória modellben használt a glória sugarát végtelenben kell venni, hogy figyelembe vegyük a kísérletileg hozzáférhető tartományon kívüli részecskék hozzájárulását a korrelációhoz. Ezeket elvégezve a Bose-Einstein korreláció a következőként írható fel az (1.17)-es páreloszlás forrásfüggvény alkalmazásával:

$$C_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{K}) = 1-\lambda+\lambda\int d^3r\ D_{(mm)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{K})|\psi_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r})|^2, \tag{1.42}$$

ahol a ψ a már szimmetrizált hullámfüggvényt jelöli. Ezt Bowler-Sinyukov-formulának is nevezzük [30, 31]. Ez az integrál analitikusan nem oldható meg. A gyakorlatban azonban léteznek módszerek ennek kezelésére (lásd később a 2.2.4-es fejezetben és részletesebben a [14, 32] forrásokban). Érdemes itt még megemlíteni, hogy figyelni kell a használt koordináta-rendszerre, mivel a Coulomb korrekció a PCMS rendszerbeli $\boldsymbol{q}$-tól függ és a mérés során az LCMS-ben vett $\boldsymbol{q}$ használatosabb a nehézionok ütköztetésénél.

[3] Itt is hivatalosan mindent hullámszámokkal kellene levezetni, de a végén áttérhetünk impulzusra

[4] Értéke $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$, ahol e elemi töltés, ϵ_0 a vákuum permittivitás és c a fénysebesség

Három dimenzióban ez egy Lorenzt-transzformációt jelent, egydimenziós esetben meg átlagolni kell a q_{PCMS} értékekre, ha q_{LCMS}-t használtunk.

A femtoszkópia elméleti alapjai tehát ezen fejezetben leírtakon alapszanak. Bár lehetne még bővebb és részletesebb leírást tenni ezen terület szépségeinek és bonyodalmainak részletesebb feltárása ügyében, azonban ezt terjedelmi okok miatt muszáj kihagyni. Érdeklődőknek ajánlom figyelmébe a fentiekben hivatkozásként megjelölt könyveket, értekezéseket és cikkeket. A következő fejezetben ismertetem, hogy milyen gyakorlati módszereket szokás alkalmazni a korreláció és a megfelelő paraméterek mérésére és bemutatom a CMS detektor szerkezetét, felépítését és működését.

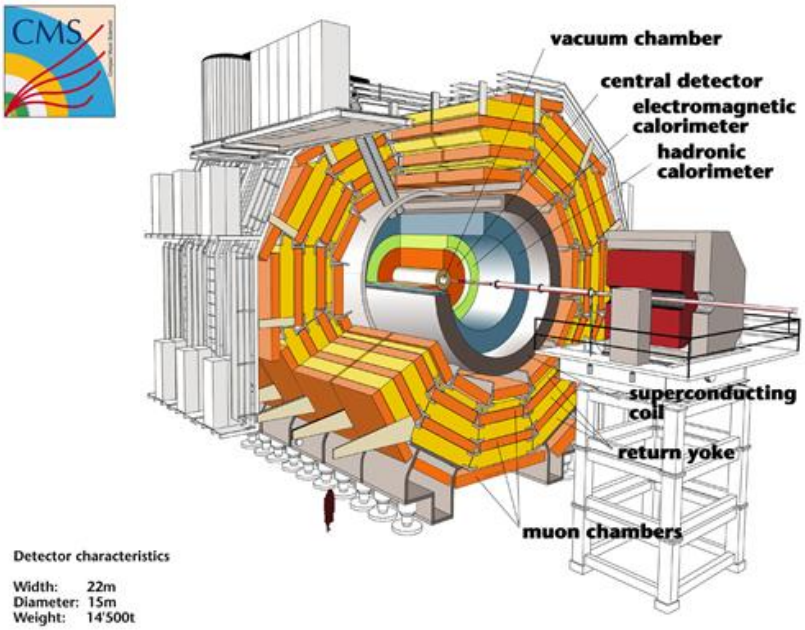
2. Mérési eszközök és módszerek

2.1. Mi is az a CMS?

A kvantumstatisztikus korrelációk (például a Bose–Einstein korrelációk) pontos méréséhez kiemelkedő detektor-teljesítmény szükséges. A CERN Nagy Hadronütköztetőjének (angolul *Large Hadron Collider* avagy LHC) Compact Muon Solenoid (CMS) detektorrendszerét, ennek megfelelően tervezték. Képességét tekintve proton–proton, valamint nehézion (ólom–ólom) ütközésekben is kiválóan tud működni, akár 14 TeV (illetve 5,5 TeV nukleon-nukleon) ütközési energiákon és a legmagasabb (10^{34} cm^{-2}s^{-1} nagyságrendű) luminozitások[5] mellett [33]. Az alábbiakban részletezem, miként járul hozzá a belső nyomkövető rendszer (szilícium pixel- és szalagos detektorok), a detektor időbeli és térbeli felbontása (beleértve a szögfelbontást), a teljes szöglefedettséget biztosító hermetikusság, valamint az adatgyűjtés és trigger-rendszer a Bose–Einstein korrelációk méréséhez.

A detektor hengerszimmetrikus kialakítású. Középpontjában egy nagy méretű, szupravezető szolenoid tekercs található, amely 4 T erősségű mágneses teret hoz létre. Ez veszi körül a teljesen szilícium alapú nyomkövető rendszert (pixel- és csíkdetektorokat). E belső detektorrétegeket eg y elektromágneses kalóriméter (ólom–wolframát kristályokból) és egy hadronkaloriméter (réz-szcintillátor) követi, végül a vasszerkezetű mágnes visszafordító köpenyébe („yoke”) integrált négy rétegű müon-detektor zárja a sort [33]. A felépítés illusztrációja a 4. ábrán látható. A következőkben felvázolom ezeknek működését és lényegét.

[5] A luminozitás a részecskefizikában azt mutatja meg, hogy mekkora az esélye, hogy két részecske ütközik. A luminozitás és a hatáskeresztmetszet szorzata ütközési gyakoriságot. Ez a szám azt jelenti, hogy másodpercenként akár több milliárd esemény (ütközés) is létrejöhet, ha a keresett reakció hatáskeresztmetszete elegendően nagy.



4. ábra. A CMS-detektor felépítése. Az ábra forrása: lásd [34]

.

2.1.1. Nyomkövetés és pályarekonstrukció

A CMS detektor belső nyomkövető rendszere (*tracker*) teljes egészében szilícium alapú: a legbelső rétegekben szilícium pixel detektorok,[6] - amik a vertexek (a részecskék kiindulási pontja avagy az ütközések helye) pontos azonosításában játszanak fontos szerepet - kívül pedig szilícium szalagos detektorok[7] helyezkednek el - melyek segítségével a háromdimenziós pályák χ^2-es illesztéssel rekonstruálhatók (lásd alább) [33]. Ezek a detektorrétegek a nagy, 3,8 T indukciójú szolenoid mágnesen belül vannak, így a trackerben mozgó töltött részecskék pályája elgörbül – ezzel pedig lehetővé téve az impulzusuk és töltésének előjelének (a pályagörbület irányából) pontos mérését a Lorentz-erő révén [35]. Ezen rétegek több tucat mérési pontot adnak egy-egy pálya rekonstrukciójához, ami rendkívül precíz eredményeket tud produkálni. Az impulzusfelbontás megközelítőleg 0,7% 1 GeV/c körüli momentumoknál, és ∼5% 1000 GeV/c-nél a detektor központi tartományában [35]. Emellett a nyomkövető rendszerrel a vertex rekonstrukciója $\sim 10\ \mu m$ nagyságrendű precizitással lehetséges [35].

A részecskeazonosításban a nyomkövető rendszer további szerepe, hogy más aldetektorokkal együttműködve segít megkülönböztetni a különböző részecskefajtákat. Az elektromágneses kölcsönhatással rendelkező részecskék – elsősorban elektronok és fotonok – energiáját az elektromágneses kaloriméter (ECAL) méri. A nagyenergiás elektron

[6] A detektor apró négyzetrácsos érzékelőkből áll, ahol minden kis pixel különálló csatorna. Amikor egy részecske áthalad rajta, egy-egy pixel jelez.

[7] Itt az érzékelők vékony, hosszú sávokra („szalagokra”) vannak osztva. Ezek kevésbé részletesek, mint a pixelek, de olcsóbban nagy terület lefedhető.

vagy foton belépve a kristályba ugyanis elektromágneses záporokat indít el: egy elektron fékezési sugárzással fotont bocsát ki, az pedig elektron–pozitron párrá alakul, és így tovább. Ezek a záporok elnyelődnek a kristályban, és a keletkező fényt fotodetektorok érzékelik. Ebből aztán rekonstruálható a részecske energiája. A hadron kaloriméter (HCAL) pedig az erős kölcsönhatásban részt vevő részecskék – pl. protonok, neutronok, pionok (azaz hadronok) –energiáját méri. Működését tekintve ugyanúgy működik mért csak anyagra és elhelyezkedése más. Az mért impulzusok és a kaloriméterekben leadott energia alapján el lehet elkülöníteni a müonokat, elektronokat vagy hadronokat. A Bose–Einstein korrelációs méréseknél jellemzően az azonos töltésű pionpárokat vizsgáljuk; ebben a nyomkövető precíziós pályaadatai biztosítják, hogy valóban azonos típusú és töltésű részecskék (például két π^+ vagy két π^-) kerüljenek be a korrelációs analízisbe.

2.1.2. Az időbeli és térbeli felbontás jelentősége

A Bose–Einstein effektus, (mint már az az eddigiek tükrében már jól tudható) akkor jelentkezik, ha két pion impulzusa nagyon hasonló, azaz kicsi a relatív impulzuskülönbségük. Ennek detektálásához a részecskék impulzusát és repülési irányát rendkívül pontosan kell mérni, különben a korrelációs jel elmosódna a mérési bizonytalanságok miatt. A CMS nagy felbontása garantálja, hogy akár kis szögben eltérő, majdnem párhuzamosan haladó, csekély momentumkülönbségű részecskepárok is különálló nyomként rekonstruálhatók legyenek [33].

Hasonlóképpen lényeges az időbeli felbontás: az LHC ütközései 25 ns-os időközönként követik egymást, de a CMS elektronikája képes az eseményeket pontos időzítéssel szétválasztani, így minden detektálási jel a megfelelő ütközéshez társítható. Ez megakadályozza, hogy különböző ütközések részecskéi keveredjenek a kiértékelés során. A gyors jelkiolvasás és nagy időbeli precizitás a hatalmas luminozitású környezetben, -ahol akár 20 ütközés is történhet egy kötegátfutás [8] („*bunch crossing*") alatt - különösen fontos: a detektor lehetővé teszi, hogy az egy kötegen belüli többszörös ütközések (más néven pile-up, amikor például több proton-proton ütközés történik egyazon pillanatban) nyomait térben és időben is elkülönítsük. Ily módon a Bose–Einstein korrelációs analízishez csak az egyazon primer (azaz az eredeti, nagy energiájú) ütközésből származó részecskepárokat társítjuk, biztosítva a korrelációs hatás zavartalan megfigyelését. Szekunder ütközéseknek hívjuk azokat a másodlagos folyamatokat, amikor egy primer ütközésből származó részecske ütközik mással, amikből újabb részecskék jöhetnek létre.

2.1.3. Teljes lefedettség és hermetikus lezárás

A CMS detektort úgy alakították ki, hogy gyakorlatilag a teljes térszöget lefedje, azaz hermetikusan vegye körül az ütközési pontot. A nyomkövető rendszer kb. $|\eta| < 2,5$ tartományig követi a töltött részecskéket, a kaloriméterek és a müonrendszer

[8] protonokat nem egyesével, hanem „csomókban", úgynevezett kötegekben (bunch-okban) gyorsítják és ütköztetik. Egy ilyen bunch akár 10^{11} db protont is tartalmazhat

pedig egészen $|\eta| \approx 5$-ig kiterjednek az előre irányokban is [33]. Ez a szimmetrikus, 4π-szögfedésű kialakítás nagy előnyt jelent a több részecskét kibocsátó események detektálásában. Egyrészt bármilyen irányba is repülnek a keletkező részecskék, a detektor valamely alrendszere érzékelni tudja azokat, így az események globális jellemzői (például a keletkezett részecskék száma, impulzuseloszlása) pontosan mérhetők. Másrészt a detektor hermetikussága biztosítja, hogy ne maradjanak holtterek a lefedettségben – a Bose–Einstein korrelációk elemzésénél így gyakorlatilag az összes lehetséges részecskepár hozzájárulhat a méréshez, nem vész el információ amiatt, hogy egy részecske extrém szögben (detektálatlanul) távozott. A detektor hengeres, koncentrikus rétegekből álló, szimmetrikus felépítése továbbá garantálja az azonos mérési teljesítményt minden irányban. Ez minimálisra csökkenti az esetleges irányfüggő torzításokat a korrelációk mérésében, hiszen a detektor válasza közel homogén az egész szögtartományban.

2.2. A korrelációs függvények mérése

A kutatás során egy már ugyanezen adatokon elvégzett analízis eredményeinek minél pontosabb rekonstrukciója volt a célom. Ennek elvégeztével biztosítottuk a kutatócsoporttal, hogy a jövőbeli új eredményekhez a megfelelő programokat és rutinokat használjuk. Az eredeti analízist, ami alapján jelen dolgozat szerzője is dolgozott az olvasó a [27]-es cikkben éri el. Az analízis során tehát a hadronok két-részecskés Bose–Einstein korrelációs függvényének illesztést végezzük el az elméletben ismertett Lévy-típusú forráseloszlásokból kiindulva és meghatározzuk a λ korrelációs erősség, az α Lévy-index és az R Lévy-skálaparaméter értékeit, a részecskepár transzverz tömegének (m_T) függvényében, különböző centralitások esetén.

2.2.1. A használt adatstruktúra

A CMS detektor minden ütközés során több ezer részecskéről gyűjt adatot. Ezeket az adatokat egy különleges formátumban tároljuk, amelyet AOD-nak (Analysis Object Data) nevezünk. Ebben az adatformátumban minden fontos információ benne van, amit az elemzésekhez fel tudunk használni (például a részecskék sebessége, töltése, iránya stb.).

Az általam használt 2018-as adathalmaz körülbelül 2.65 billió minimum-bais eseményt tartalmaz egyenként körülbelül 250-es multiplicitással. Még a tömörített, elérhető maximális adatmennyiség is összesen 10 TB nagyságrendű, aminek 99 %-át a pálya- míg 1 %-át az eseménytulajdonságok teszik ki. Az adatok az EOS-on („*Extremely Optimized Storage*”) érhetőek el, ami a CERN által fejlesztett és üzemeltetett nagy teljesítményű fájlrendszer, ami kifejezetten az ilyen ütköztetésénél keletkező hatalmas adatmennyiség tárolására és gyors elérésére használható [36]. Az adatok hatékony analíziséhez tervezett, objektumorientált C++ keretrendszert, amit használtunk ROOT-nak hívják. Ebben az adatok ún. „Tree” nevű adatstruktúrában vannak tárolva[9], amibe csak azok a mennyiségek lettek esetemben beépítve, amik jelen és jövőbeli

[9]Itt szándékosan nem használom a magyar fa fordítást kihangsúlyozva azt, hogy ez egy adatstruk-

adatanalízishez szükségesek. Ezeknek egy rövid összefoglalását az alábbi **??**. táblázat tartalmazza.

Az analízisem folyamán a CERN LXPLUS-on dolgoztam, ami egy távoli elérésű Linux alapú cluster (több összekapcsolt szerver). Ebben a CERN szoftverkörnyezete és fájlrendszerei (mint például az EOS is) elérhetőek. A továbbiakban bemutatom a numerikus módszertant az analízishez és részletezni fogom a fenti változók jelentését és használatát is.

2.2.2. Adat szelekció

Az analízis során nem minden rendelkezésre álló adat volt releváns. Csak azokat az eseményeket tartottuk meg az eredeti analízishez hasonlóan, ahol csak 1 nukleon-nukleon ütközés történt és ennek távolsága a detektor középpontjától kisebb volt mint 15 cm, így kiszűrve a túl perifériku ütközéseket. Az ilyen különböző szűréseket vágásoknak („*cut*") nevezzük, abban az értelemben, hogy „kivágjuk" a szükségtelen adatokat. Ez utóbbi vágást a 5. ábra bal felső képe mutatja.

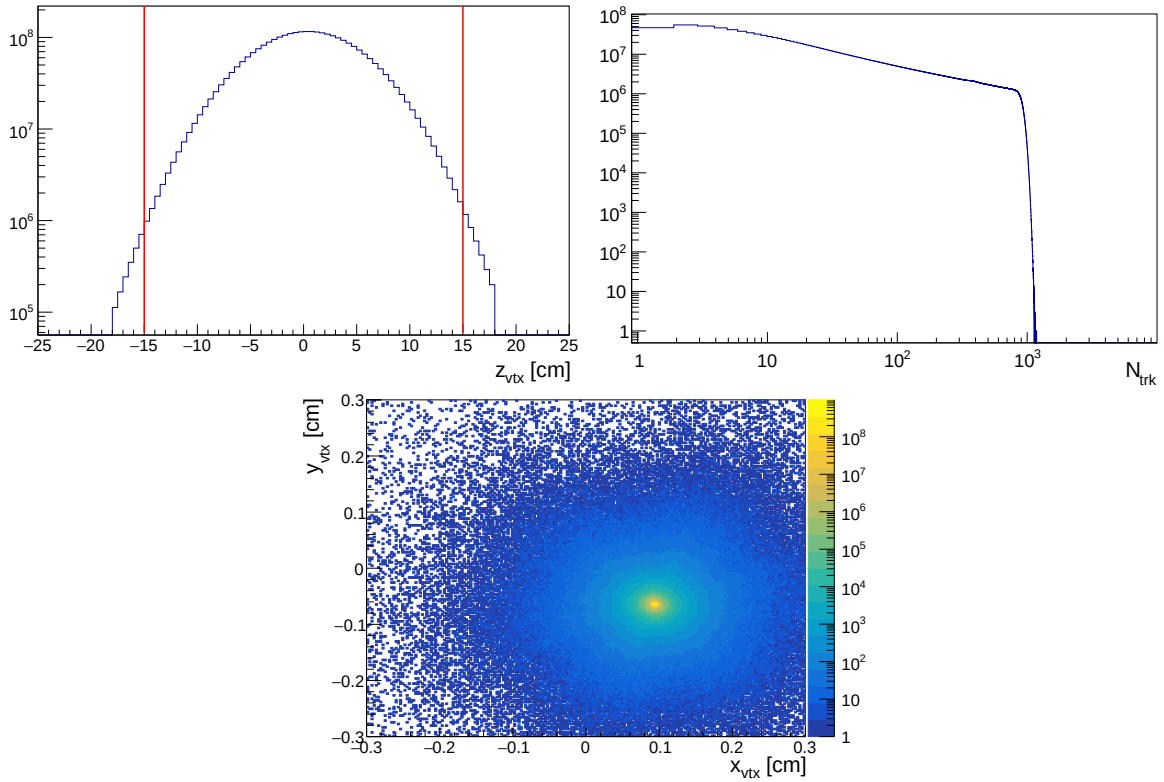
A nyers adatokban előfordulhatnak részecskék nyomai is, amik nem az ütközésből származnak, hanem a nyalábcső faláról vagy a vákuumrendszerről szóródnak vissza. Ez az ún. „*beam-halo*" jelenség. Ezen kívül a kozmikus sugarak is eltalálhatják „véletlenül" a detektort. Ezek szűrésére standard filtereket használtak, amiket a felhasznált adatok már tartalmaznak és az analízis már csak a CMS „*highPurity*" adatait használja amelyek transzverz impulzusa meghaladta a 0.5 GeV-t, és a mért impulzus relatív hibája kisebb volt 10%-nál. [27, 37].

A Bose–Einstein-korrelációk vizsgálata érdekében a pszeudorapiditás abszolút értékét $|\eta| < 0.95$-re korlátoztuk, hogy csak a midrapiditás közeli részecskéket vegyük figyelembe, ami tisztább adatminta elérését eredményezte [10]. Ezen kívül a pályák rekonstruálásának pontossága érdekében megköveteltük, hogy minden kiválasztott pálya legalább két találattal rendelkezzen a szilícium pixel detektorban [27]. A kiválasztott pályákhoz további feltétel volt, hogy legalább 11 találatuk legyen a nyomkövető rendszerben, valamint a pályaillesztés jóságát jellemző normált χ^2 érték (lásd alább) ne haladja meg a 0.18-at. Emellett megköveteltük, hogy a rekonstrukció során a primer csúcshoz viszonyított transzverz és longitudinális eltérés statisztikai hibával osztott abszolút értéke (azaz $|D_{xy}/\sigma_{xy}|$ és $|D_z/\sigma_z|$) kisebb legyen 3-nál, biztosítva ezzel a jól meghatározott eredetű pályák kiválasztását [27]. Ezen vágások egy részét a 6. ábra képei mutatják be. Az 5. ábra képei pedig a vertexek transzverz eloszlását, valamint a multiplicitás értékek eloszlását ábrázolják.

Egy másik fontos szempont a detektált részecsketípusok szerinti szelektálás. Ez azonban ilyen centrális ólom-ólom ütközésekben szinte teljesen lehetetlen. Feltételezzük azonban, (ahogy ez már többször is jelezve volt feljebb) hogy az összes detektált töltött hadron pion volt, de figyelembe kell venni a későbbiekben, hogy jelentős mennyiségű proton és kaon is lehet a detektált részecskék között. Alacsonyabb transzverz im-

túra

[10] Ennek oka, hogy a detektor főként a nyalábirányra merőleges részecskéket észleli [14]



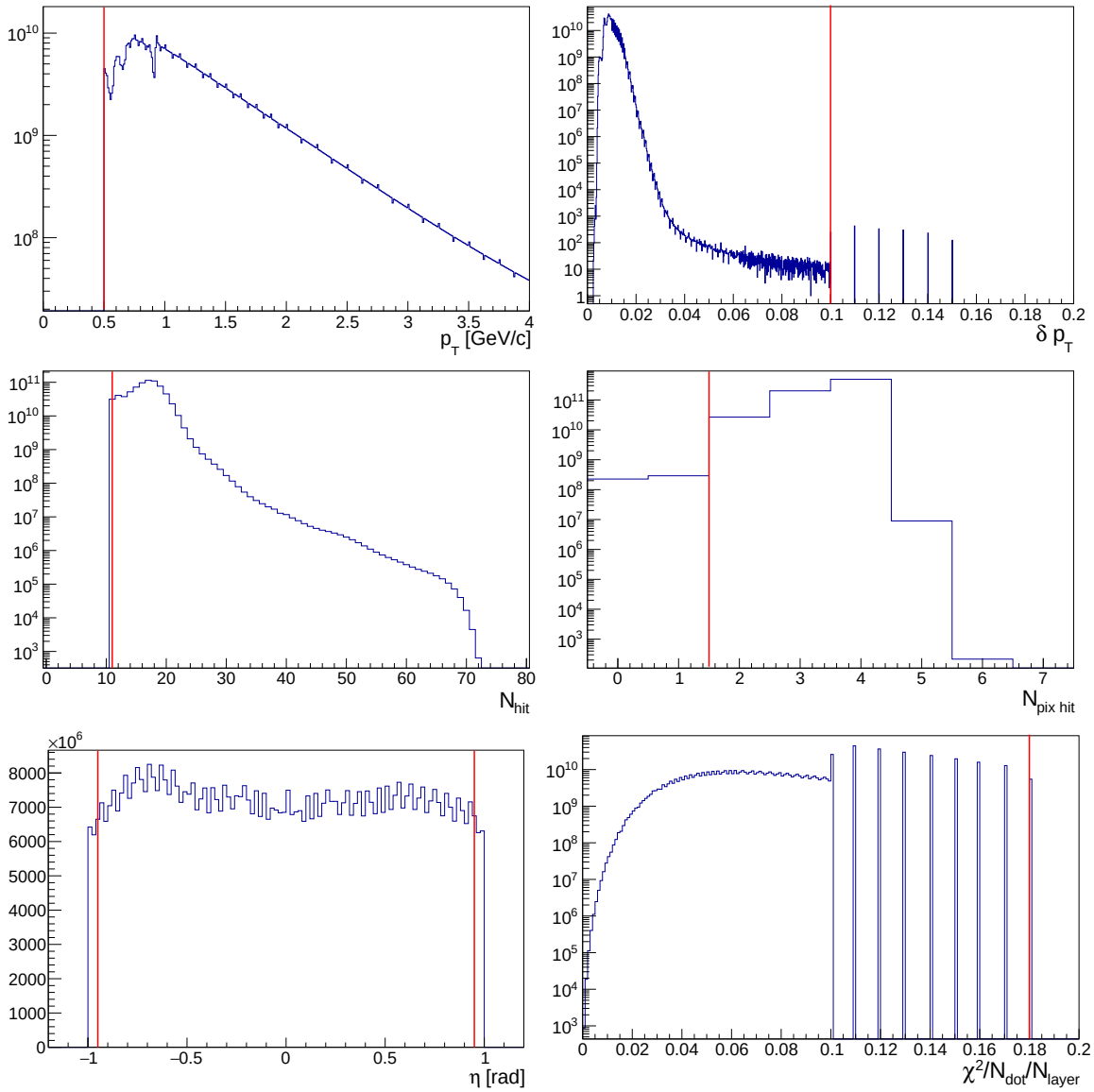
5. ábra. Az detektált részecskepályák vertexeinek labor-koordinátarendszerben vett z- és transzverz komponenseinek eloszlása látható a bal felő és az alsó ábrán. A jobb felső ábra pedig az eseménye multiplicitását mutatja. A piros vonalak mutatják detektor középpontjától való 15 cm-es eltérés vágásait.

pulzusoknál ezek aránya a pionokhoz képest alacsony (5-10%) , azonban ezen arányok gyorsan nőnek a p_T növekedésével [38]. Ez befolyásolhatja a korreláció értékét, amire a későbbiekben még visszatérünk.

Vannak azonban olyan hatások, amiket egyrészecskés vágásokkal nem tudunk figyelembe venni. Ezeket párvágásoknak nevezzük, amikor is részecskepárok relatív adatait szűrjük. Ilyen hatás például az, amit összeolvadásnak („*merging*") nevezünk és a detektor véges felbontásával kapcsolatos. Ekkor ugyanis a detektor két egymáshoz közel haladó részecskét egyként detektál és egy pálya rekonstruálódik. A másik ilyen fontos eset pedig az osztódás („splitting"), amikor az előző hatás ellentéteként egy részecskéhez több pálya rendelődik. Ezen problémák megoldását a következő fejezetben részletezem, miután a korrelációs függvény mérési technikája bemutatásra került.

2.2.3. A korreláció mérésének technikája

Ahhoz hogy rá lehessen térni a korreláció mérésre először ellenőrizni kell, hogy mi a megfelelő 1 dimenziós koordinátaválasztás esetünkben. Ennek kiválasztását úgy végezzük el, hogy ábrázoljuk a (az alábbiakban leírt módszerrel kapott) kétdimen-



6. ábra. Az analízisben használt további pályavágások. Fentről kezdve és jobbról balra haladva az ábrák: transzverz impulzus eloszlás, transzverz impulzus hibájának eloszlása, a beütések száma a teljes nyomkövető rendszerben (pixel és szalag detektorokban), a beütések eloszlása a szilícium pixel detektorban, a pszeudorapiditás eloszlás és a illesztés jóságának eloszlása

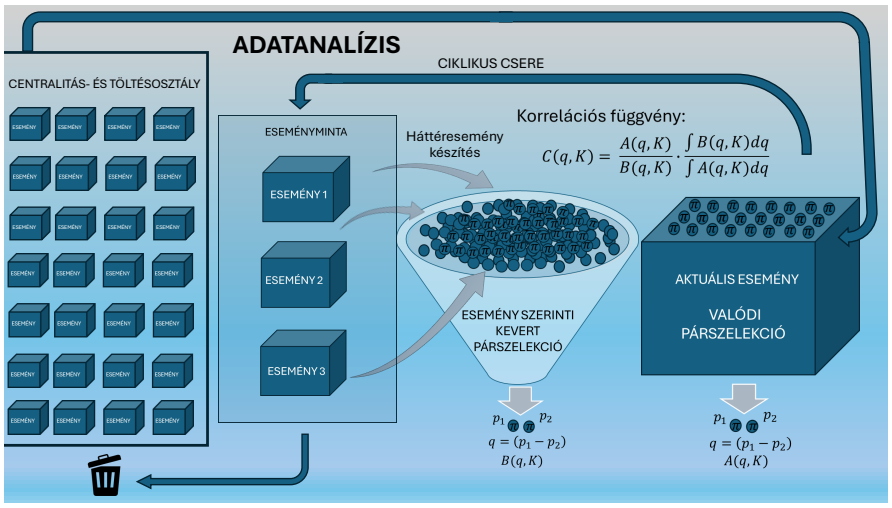
ziós $C(q_t, q_z)$ és $C(q_0, |\boldsymbol{q}|)$ korrelációs hisztogramokat, ahol q_t az impulzuskülönbség transzverz-, q_z a z irányú-, q_0 az időbeli komponensét és $|\boldsymbol{q}|$ pedig a térkomponensek hosszát jelenti. Abban az esetben, ha a korreláció q_{inv}-től függ, akkor minden $\boldsymbol{q}$ esetében $q_0 = |\boldsymbol{q}|$ egyenes mentén kell, hogy látható legyen egy korrelációs csúcs. Ennek oka az, hogy a bozonok esetében a $C_2(q, K)$ függvényben egy pozitív irányú csúcs megjelenését várjuk az alacsony q_{inv} értékeknél (lásd 1.2.3-as fejezet), mivel q_{inv} definíciója alapján (lásd 1.3.1-es fejezet) ebben az esetben lesz nulla környékén. Azonban, ha a csúcs kis q értékeknél jelenik meg a $|\mathbf{q_{LCMS}}|$ a megfelelő választás. Ezen vizsgálatot a [27] hivatkozott eredeti analízis tartalmazza, amelyben arra a következtetésre jutottak, hogy az LCMS-rendszerben definiált invariáns impulzuskülönbség szolgáltatja az optimális egyváltozós korrelációs változót. A következőkben tehát a q-ként jelölt mennyiségek tehát a $|\boldsymbol{q_{LCMS}}|$-t jelenti.

A korrelációk lemérésére az ún. eseménykeverést módszerét követjük. Ennek ismertetésére jelöljük $A(q, K_T)$-val az azonos eseményekből származó q impulzuskülönbségű és K_T átlagos transzverz impulzusú részecskepárok eloszlását ezen két változó szerint. Ezt az eddigiekben egy valószínűség-sűrűség függvénnyel jellemeztük, azonban a valóságban ez egy binezett hisztogram és nem függ q és K_T konkrét mértékétől. Ez az eloszlás viszont tartalmaz olyan eseménygeometriai hatásokat amiket a korreláció mérésekor ki szeretnénk szűrni. Például ha két pion ugyanabból a *jetből* (kúp alakú sugárnyaláb, amiben a keletkező hadronok haladnak a kifagyáskor) származik, akkor kicsi lesz az impulzuskülönbségük, függetlenül attól, hogy van-e köztük kvantumstatisztikus korreláció vagy nincs. Számos más hasonló hatás kiküszöbölése céljából definiálunk egy $B(q, K_T)$ háttéreloszlást, ami olyan párok járulékait hordozza, amik között nem jelentkezhet kvantumstatisztikus korreláció.

A mérés úgy történik, hogy az eseményeket csoportosítjuk azok z-vertexük, multiplicitásuk, és centralistásuk szerint külön binekben. Minden osztályhoz létrehozunk egy, az analízis során fix számú eseményt tartalmazó eseménymintát. Ezután minden osztály esetében minden aktuális eseményhez (ahogy haladunk végig az eseményeken az analízis során) létrehoznunk egy az éppen aktuális eseménnyel megegyező multiplicitású (részecskeszámú) kevert háttéreseményt, amelyben az adott osztályú eseményminta eseményiből választjuk ki a nem azonos eseményekhez tartozó részecskepárokat és ezek eloszlását vesszük (lásd 7. ábra) [14]. Ehhez természetesen az eseményminta összmultiplicitása legalább annyinak kell lennie, mint a legnagyobb multiplicitású eseményének. Az $A(q)$ és $B(q)$ függvények mérésekor egy ún. hatásfokkorrekciót (efficiency correction) használunk, ami azt jelenti, hogy korrigáljuk a mért adatokat a detektor által nem tökéletesen érzékelt részecskék miatt. Mivel egy adott q értékhez tartozó részecskepárokat eltérő valószínűséggel, így az eloszlásokban hamis torzítások mutatkozhatnak ezen hatás figyelembevétele nélkül [39]. Ezért a gyakorlatban egy:

$$w = \frac{1}{\varepsilon(p_1, \eta_1, \text{cent.}) \cdot \varepsilon(p_2, \eta_2, \text{cent.})} \tag{2.1}$$

súllyal vesszük, ahol ε detektálásának valószínűsége. Ezeket a súlyokat a CERN hivatalos, nem publikus korrekciós adatbázisából vettük, amit a CMS kutatócsoportja



7. ábra. Az adatanalízis és az eseménykeverés eljárása. A képen p_1 és p_2 impulzusú párok választódnak ki az esemény keverés módszerével. Fontos, hogy a $B(q,K)$ háttéreloszláshoz kellő random szelekció során a kiválasztott részecskepárok nem azonos eseményekből kell, hogy kiválasztódjanak. Elsősorban a részecskék közül kell választani majd azután és nem eseményt, hogy elkerüljük az alacsony multiplicitású események felülreprezentálását

biztosított. Így az eloszlások fizikai információt tartalmaznak, nem detektorspecifikus torzítást. Végül $q = 8$ GeV/c impulzuskülönbségig mértük meg ezeket az eloszlásokat, hisztogramonként 6000 bint használva. Ezek után a korrelációs függvény megkapható e két eloszlás normált hányadosaként:

$$C_2(q, K_T) = \frac{A(q, K_T)}{B(q, K_T)} \cdot \frac{\int A(q, K_T)dq}{\int B(q, K_T)dq}, \tag{2.2}$$

ahol az integrált olyan széles tartományon vesszük, ahol a korreláció már nem áll fent. Ezen a hányadosnak q-függő részének változását vizsgáljuk K_T kis tartományainak átlagértékének függvényében. Mi ezt 6 darab centralitásosztályra[11] (0-60%) és 24 darab K_T osztályra (0.5-.0.9 GeV/c) csináltuk meg pozitív és negatív pionpárok esetén. Egy konkrét osztálynál mért, kis q-knál megjelenő $C_2(q)$ korrelációs csúcs látható a 9. ábra jobb felső képén. A jobb jobb alsó képen látható, hogy az alacsony q tartományoknál $A(q)$ és $B(q)$ értéke eltér a skálázás után is, ami a Bose-Einstein csúcs megjelenésére utal, ami szépen ki is rajzolódik aza alatt lévő ábra adatpontjaival.

Ezen ábra azonban már az előző fejezet végén is említett párvágásokat elvégezve kaptuk meg. Ehhez előállítottuk a kétdimenziós helyfüggő $A(\Delta\eta, \Delta\phi)$ aktuális-, $B(\Delta\eta, \Delta\phi)$

[11] A centralitás adatokat a nagy pszeudorapiditású (előre és hátra irányú) tartományokat mérő ún. (Hadron Forward) HF-kaloriméter által mért energialeadás vagy töltésszám alapján határozzuk meg. Az általunk használt alap HF-binek alsó és felső határait a [27] kutatásban használt határokkal megegyező módon vettük.

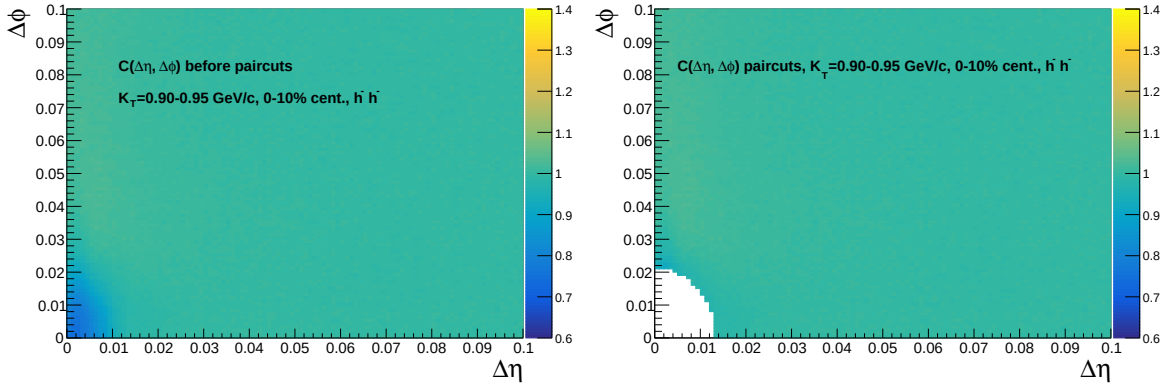
háttér- és belőlük a $C(\Delta\eta, \Delta\phi)$ térbeli páreloszlást a (2.2)-es egyenlet alapján a következőképpen:

$$C(\Delta\eta, \Delta\phi) = \frac{A(\Delta\eta, \Delta\phi)}{B(\Delta\eta, \Delta\phi)} \cdot \frac{\int B(\Delta\eta, \Delta\phi)}{\int A(\Delta\eta, \Delta\phi)}, \tag{2.3}$$

ahol $\Delta\eta = \eta_1 - \eta_2$ a két részecske relatív pszeudorapiditása és $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ a relatív azimutszöge. Az integrálok itt skaláris felületi integrálokat jelölnek és a $\Delta\eta > 0,04$ tartományra vannak véve, ahol az összeolvadás már nem érzékelhető. Ezt elvégeztük a különböző centralitás és K_T osztályokra és azt láttuk, hogy a [27] kutatásnak megfelelően ezen osztályoktól függetlenül a hisztogram értékei a kis $\Delta\eta$ és $\Delta\phi$ értékeken kívül - ahol az értékek kisebbnek adódtak mint egy - konstans egynek mutatkoztak. Ez azt jelenti, hogy ebben régióban az eloszlásokban kevesebb pár van, amit feltehetőleg az összeolvadás miatt van. Ezért az eloszlásokból egy ellipszis szeletet, ami a következő egyenlőtlenséget elégíti ki:

$$\left(\frac{|\Delta\eta|}{\Delta\eta_{cut}}\right)^2 + \left(\frac{|\Delta\phi|}{\Delta\phi_{cut}}\right)^2 > 1, \tag{2.4}$$

ahol $\Delta\eta_{cut} = 0,014$, $\Delta\phi_{cut} = 0,022$ [27]. Ezt a vágást a 8. ábra képei illusztrálják.



8. ábra. A mért térbeli eloszlás grafikonok a párvágás előtt és után $K_T = 0,90 - 0,95$ GeV átlagos impulzus- és 10-20%-os centralitás binek mellett negatív pionokra

Az így definiált $C_2(q, K_T)$ függvény még tartalmaz sok egyéb nem femtoszkópiai hatásokat is, amik magasabb q értékeknél erősödnek fel. Ezeket egy ún. háttérfüggvény illesztésével szűrjük ki, amit $BG(q)$-val szokás jelölni. A használt módszer neve hibrid klaszterszubsztrakció („*Hybrid Cluste Substraction*") és az alábbi alak illesztését végezzük:

$$BG(q) = N\left(1 + \alpha_1 e^{-(qR_1)^2}\right)\left(1 - \alpha_2 e^{-(qR_2)^2}\right), \tag{2.5}$$

ahol N, q, R_1, R_2, α_1, α_2 az illesztendő paraméterek [27, 40]. Ezt a függvényt a χ^2 minimalizációs módszerrel illesztettük meg a MINUIT2 minimalizációs csomagot használva [41]. Az illesztési tartomány kezdetét a K_T-től és centralitástól függően $q = 0,15$ GeV/c-től $q = 0,4$ GeV/c-ig terjedően vettük, kihagyva a kvantumstatisztikus

hatásokat. Az illesztést az egész maradék q tartományon elvégeztük, ahogy a 9. ábra bal felső képe is mutatja. Ezeknek a paramétereknek nincs konkrét fizikai jelentésük. A nagy q-knál lévő függvényalak ugyanis függhet a használt háttérkeverési technikától.

Miután megkaptuk a háttérfüggvényt, azzal elosztjuk a mért $C(q)$ adatokat és az így kapott eloszlást dupla-arány korrelációs függvénynek (*double-ratio correlation function*) nevezzük. Így a nagy impulzuskülönbségű részecskék által érzékel háttér hatását kiküszöbölve, egy olyan eloszlást kapunk ami a nagy q-kra közel 1-nek adódik (lásd 9. ábra):

$$DR(q) = \frac{C(q)}{BG(q)}. \tag{2.6}$$

Észrevehető, hogy még ezek után is marad némi háttérhatás a korrelációs függvényben az impulzuskülönbség tartomány csúcshoz közelebbi felénél. Erre való illesztés hasznosságáról a CMS kollaboráció azt találta, hogy nem változtat a végleges fizikai paramétereken. Itt megjegyzendő még, hogy a háttérillesztés kihagyásával kapott eredmények kb. 1 %-al térnek el ezen kiküszöbölések alkalmazásával kapottaktól.

2.2.4. Lévy-forrás illesztése

Miután sikeresen szelektáltuk az adatokat és kiszűrtük a legtöbb háttérhatás meg lehet illeszteni az (esetünkben) (1.42)-es Bowler-Sinyukow-egyenletet.

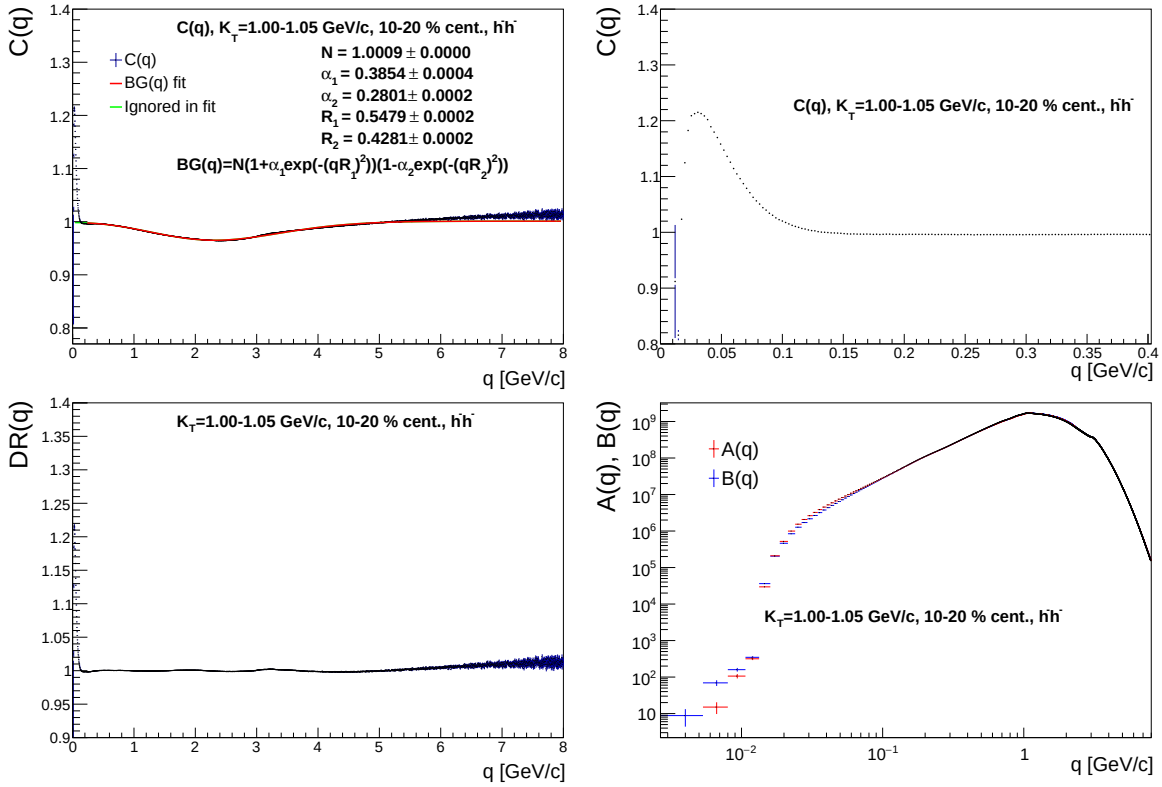
Mint már az az előző fejezetben is elhangzott a Coulomb-kölcsönhatást figyelembe vevő korrelációk mérése nem egyértelmű, hiszen az (1.42)-es Bowler-Sinyukow-formulának nincs analitikus megoldása. Ezért a Coulomb-kölcsönhatást szokás „leválasztani” és egy korrekcióként kezelni. Ennek módszere az, hogy felteszünk egy alakot a forrásról (esetünkben ez Lévy-eloszlás), amit egy $\mathcal{P}$ (esetünkben ez az eddigiek alapján ez $\mathcal{P} = (q, R, \alpha, \lambda)$) paramétervektorral jellemzünk, ami hordozza K-függést. Ennek értékét szeretnénk megkapni. Definiálunk egy tisztán kvantumstatisztikus, (1.30)-es és (1.37)-es egyenlettel leírt $C_2^{(0)}(\mathcal{P}, \boldsymbol{q}, \lambda)$ függvényt, ami K helyett $\mathcal{P}$-től függ és nem tartalmaz Coulomb hatást [14]. Ezután definiálunk egy ún. Coulomb-korrekciós függvényt a két korreláció hányadosaként:

$$K(\mathcal{P}, \boldsymbol{q}) = \frac{C_2(\mathcal{P}, \boldsymbol{q})}{C_2^{(0)}(\mathcal{P}, \boldsymbol{q})}. \tag{2.7}$$

Ez a legegyszerűbb pontszerű forrás feltételezésével az úgynevezett Gamow-faktort adja [32]:

$$S(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \implies K(\mathbf{q}) = K_{\text{Gamow}} = |\psi_{\mathbf{q}}(\mathbf{0})|^2 = \frac{2\pi}{e^{2\pi\eta} - 1}. \tag{2.8}$$

Ennek numerikusan értékei ennek numerikus megoldásaiból rengeteg numerikus táblázat áll rendelkezésre [32] különböző λ, R, és α paraméterek mellet. Ezen értékeket egy bináris kereső táblában tárolják az illesztésekhez. Az ez interpolálást igényel, ami fluktuációkhoz vezethet a χ^2 térben, ami torzíthatja az illesztést. A CMS kutatócsoportjának célja egy zárt matematikai formulát találni, amely: jól közelíti a numerikus



9. ábra. A bal felső kép a $BG(q)$ háttéreloszlás függvény illesztését ábrázolja, szaggatott vonallal jelölve a kezdőpontot. A jobb alsó kép a kapott $A(q)$ és $B(q)$ eloszlásokat a az egymásra skálázásuk után. A bal alsó képen a a háttéreloszlás eredményeivel leosztott korrelációs függvény, a jobb alsó képen pedig a $C(q)$ hisztogram van ábrázolva azon kis q tarmtományban, ahol a kvantumstatisztikus korrelációk jelentkeznek. Mind $K_T = 1,0 - 1,05$ átlagos transzverz impulzus és 10-20 %-os centralitás binek esetén negatív pion párokra. Az kapott értékek „simaságának” hiánya a kvantumfluktuációk miatt jelenik meg

adatokat, ami kiküszöböli az interpolációs hibákat, valamint gyorsabban és stabilabban használható illesztéshez [32]. Ennek motivációja a CMS kollaborációnak egy sikeres parametrizálása volt pionok az $\alpha = 1$ Lévy-indexű esetének (úgynevezett Cauchy-eloszlást használtak) [42] Tulajdonképen ez egy módosított Gamow-faktor volt:

$$\begin{aligned} K_{\text{Lévy}}(\mathcal{P}) &= K_{\text{Gamow}}(q) \cdot K_{mod}(q), \text{ ahol} \\ K_{mod}(q) &= 1 + \frac{\alpha_{em}\pi m_\pi R}{1,25\hbar c + qR}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

ahol m_π a piontömeg, c a fénysebesség, R a Lévy-skála paraméter, α a Lévy-index és α_{em} pedig a finomszerkezeti állandó. Ennek általánosítására a a K_{mod} rész általánosították

a következőképpen[32]:

$$K_{mod}(q) = 1 + \frac{\mathcal{A}(\alpha, R)\frac{\alpha_{em}\pi m_\pi \kappa}{q}}{1 + \mathcal{B}(\alpha, R)\kappa + \mathcal{C}(\alpha, R)\kappa^2 + \mathcal{D}(\alpha, R)\alpha\kappa^4}, \tag{2.10}$$

ahol pedig $\kappa = \frac{qR}{\alpha\hbar c}$ és az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ függvényeket alakját keresték a numerikusan kapott adatokra való illesztésekkel [32]. Azt találták hogy az általánosított egyenlet empirikus megoldása jól egyezett a numerikus adatokkal, kivéve kis q esetén, ami miatt bevezetésre került egy exponenciális $E(q)$ korrigálás és a kettő összekapcsolására bevezetésre került mégy egy simítófüggvény. Ezek alakja a következő:

$$E(q) = 1 + \mathcal{A}(\alpha, R)\exp\left(-\mathcal{B}(\alpha, R)q\right), \tag{2.11a}$$

$$F(q) = \frac{1}{1 + (q/q_0)^n}, \tag{2.11b}$$

ahol $n = 20$ a meredekségi paraméter, ami azt szabályozza milyen gyors az átmenet, $q_0 = 0,07$ az a pont helye, ahol a numerikus fluktuációk elkezdtek felerősödve megjelenni [32]. A végleges, megfelelően viselkedő függvényalakja a Coulomb korrekcióknak, amit illesztéshez lehet használni Lévy-típusú forrásfüggvény esetén:

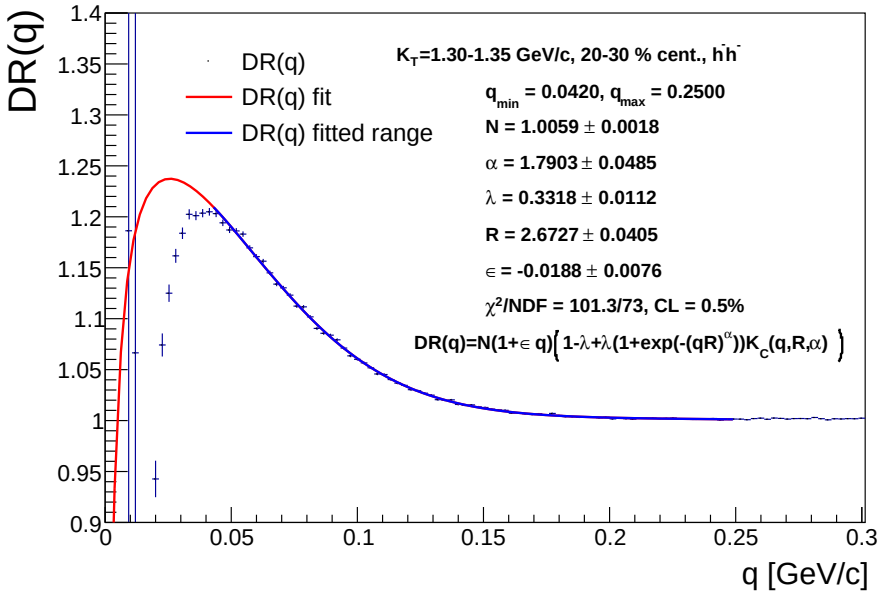
$$K_C(q, \alpha, R) = \frac{1}{\frac{F(q)}{K_{\text{Gamow}}(q)\cdot K_{mod}(q)} + (1 - F(q))\cdot E(q)}. \tag{2.12}$$

A (C.1)-as egyenleteket felhasználva az esetünkben kapott $DR(q)$ korrelációs adatokra a következő alak illesztése lesz a megfelelő:

$$DR(q, \mathcal{P}) = N(1 + \epsilon q)\left[1 - \lambda + \lambda\left(1 + e^{-(qR)^\alpha}\right)K_C(q, \alpha, R)\right], \tag{2.13}$$

ahol az öt paraméter közül N a normalizációhoz kell, ϵ pedig nem rendelkezik fizikai jelentéssel, viszont jelenlétét a megmaradó minimális háttérhatások miatt szükséges behozni, ami a nagyobb q értékeknél megmaradtak. Fizikai jelentése valójában csak a már jól ismert R α és λ paramétereknek, mely utóbbit felidézve a korreláció erősségét (és a forrás glóriáját jellemezve) mutatja a q=0 értékhez történő extrapolációval (lásd 1.3.2. fejezet). Az illesztést itt is a MINUIT2 minimalizációs csomag [41] segítségével végeztük el a χ^2 minimalizációs módszert használva. Ezt minden centralitás és K_T osztályra különböző korlátozott tartományokban végeztük, mivel a korreláció nagy q -k esetén nem jelentkezik és kis q-k esetén pedig a detektor véges impulzusfelbontása és az összeolvadási (merging) jelenség miatt nem megbízhatóak (a részleteket lásd 1.2.2. fejezet) és ezért nem fizikai hatásokat tartalmaz az a régió. Egy ilyen illesztés eredménye látható a 10. ábrán.

Az grafikonokon a CL a konfidenciaszintet jelöli, ami az illesztett paraméterek jóságát jellemzi százalék formájában úgy, hogy megmondja a valódi (tehát az illesztéstől független) paraméter hány százalék valószínűséggel esik bele az illesztett paraméter hibatartományába. Az illesztés statisztikailag akkor elfogadható, ha ez az érték nagyobb,



10. ábra. A dupla-ráció korreláció illesztés a $K_T = 1,3 - 1,35$ GeV-os és 20-30%-os osztályú negatív pionpárok esetén. A kék vonal ábrázolja az illesztett tartományt és a piros vonal pedig az illesztett függvényt. Illetve az illesztés relatív hibájának illusztrálása az alsó táblán

mint 0,1% [27]. Ezt a TMath::Prob(χ^2,NDF) függvénnyel számoltuk, ahol az NDF a szabadsági fokok száma („*Number of Degrees of Freedom*"). A 10. ábrán látszik, hogy az alacsony q-knál jelentősen kisebb a mérésben kapott csúcs, mint az elméleti formulától kapott eredményben. Ennek okát az okozza, hogy a detektor miatt keletkező nem fizikai hatások csökkentik a korrelációt, amire szimulált adatokkal jött rá a CMS-kollaboráció kutatócsoportja [27].

Kimutatták továbbá, hogy a Lévy-típusú korrelációs függvényeknek a paraméterektől függetlenül van egy univerzális levágása $q \approx 0,01$ GeV környékén [32], ami alatt a korreláció kinullázódik. Ez annak köszönthető, hogy ebben a tartományban a Gamow-faktor határozza meg a függvény viselkedését, ami forrásfüggetlen, ahogy azt a (2.8)-as kifejezésben látni lehet. Azt is megmutatták, hogy az erős kölcsönhatás nem jelentkezett ebben a tartományban [43].

Egy újabb, félig-analitikus módszerrel is elvégeztük az illesztést, aminek eredményeit az olvasó a B függelékben láthatja. Ez a módszer annak igényével készült hogy ne legyenek az illesztésben személyfüggések az önkényesen választott paraméterek miatt a korrekció számolásakor. A részleteket az olvasó a [44] hivatkozásban olvashatja.

2.2.5. A szisztematikus hibák kezelése

Az illesztéssel kapott paraméterek bizonytalansága sok forrásból származhat, mint például az választot eseményvágásokból, pályavágásokból, párvágásokból (azaz a válasz-

tott esemény-, pálya- és párszelekcióból), az illesztési határoktól és a HF-bin széleinek megválasztásától.

Ezért egy jó gyakorlat az egész illesztési eljárást többször, különböző pár, esemény és pályavágásokkal elvégezni (lásd 2 táblázat az A függelékben), és a kapott paraméterek különbségei alapján egy ún. szisztematikus hibákat számolni. A [27] analízisben minden vágásnak plusz kétféle variációját (és ezzel a 2. táblázat alapján, minden K_T és centralitás osztályon esetén 24 darab illesztést) véve a elvégezték a hibák számolását.

Azt találták, hogy az illesztések közül voltak teljesen hibásak, amik száma elenyésző az összes illesztéshez képest. Azért, hogy ezek ne módosítsák a szisztematikus hibákat, őket a végső eredményben nem vették figyelembe. A kihagyott pontokat pedig interpolálták a K_T szomszédjaiknak megfelelően. Egy további bonyodalom volt, hogy szét kellett választani ezt korrelált és nem korrelált pontonkénti szisztematikus hiba részre az egy-egy módosítás relatív hatásának eloszlásának figyelembe vételével. Az eredmények azt mutatták, hogy átlagolva a K_T osztályokra, valamint a negatív- és pozitív (eddigiekben még nem mutatott) pár esetekre, a pályavágások és párvágások összességében azonos módon járultak hozzá a szisztematikus hibához. Azonban a legnagyobb befolyást az illesztési tartományok változtatásai adták [27]. A hibaszámitás lépéseiről az olvasó az C függelékben olvashat.

3. A reprodukált és eredeti eredmények összevetése

A következő szakaszban bemutatom az analízis során kapott paraméterek eredményeit az eredeti [27] analízis eredményeinek összevetésével. Az ábrákon lévő referenciaadatok a CMS kollaboráció által publikált pion-pion párokra vonatkozó adatok, és bárki számára elérhetőek a [45] HEPData adatbázison keresztül. Ezek az adatok a (az előzőekben bemutatott) részletes hibaszámításainak köszönhetően megfelelő referenciát nyújtanak, hogy bemutassuk mennyire volt sikeres a reprodukció.

3.1. Adatszűrési tapasztalat

Mielőtt bemutatnánk a kapott eredményeket egy numerikus számítással kapcsolatos tapasztalatot fontos kiemelni.

A rendelkezésre álló adatcsomag analizálásához az LXPLUS HTCondor ütemező rendszerével [46] párhuzamosítottuk az analízis futtatásokat, (mivel a kapott adatcsomagot 1000 darab részfájlra szedték szét a kutatócsoport tagjai) hogy jelentős időt spóroljunk a nem egymás utáni futtatásokkal. A külön futtatásokat, amik a rendszerbe lettek beküldve joboknak nevezzük. A jobokban (feltehetőleg a hatalmas adatmennyiségből kifolyólag) numerikus hibák léptek fel a futás során és bizonyos események többszöri feldolgozásra (eseményduplikálás) kerültek. Ezek kiugró pontokat eredményeztek a multiplicitásban, (az 500-as és 700-as helyek közötti értékeknél) a korrelációs függvényben pedig "leszakadó" pontokat. A feltételezésünk az volt, hogy ezeket a jobokat újra beküldve a numerikus eseményduplikálások megszűnnek, ehhez azonban először

identifikálni volt szükséges a hibás őket.

Az eljárás, amit alkalmaztunk azon alapult, hogy a multiplicitásban a kiugró pontok előtt $\approx$ 10-től kezdődő tartományban folyamatosan csökkenő tendencia látható, ahogy azt az 5. ábra baloldali képe is mutatja. Kis kvantumfluktuációk azonban jelen vannak. Ezért tehát az 1000 db részanalízis eredményeiben 10-től $\sim$ 400-ig (kihagyva a problémás tartományt) megnéztük a legnagyobb multiplicitás növekedést, és abból képeztünk egy küszöbértéket. Majd újra végig mentünk a problémás tartományon azt keresve, hogy hol van az előzőek alapján meghatározott maximális fluktuációnál sokkal nagyobb növekedés az eloszlásban.

Az 1000 részanalízis fájlból csak 50-et találtunk hibásnak, amik kihagyásával nagy statisztikai veszteség nem jelentkezett. Ezen szűrés elvégeztével eltűntek a korrelációs függvényben leszakadó pontok és a multiplicitásban jelentkező kiugrások–a 9. bal alsó képét adva. Az így kapott eloszlások és a belőlük származó paraméterek eredményét mutatják be a következő fejezetek.

3.2. A korrelációs függvények összehasonlítása

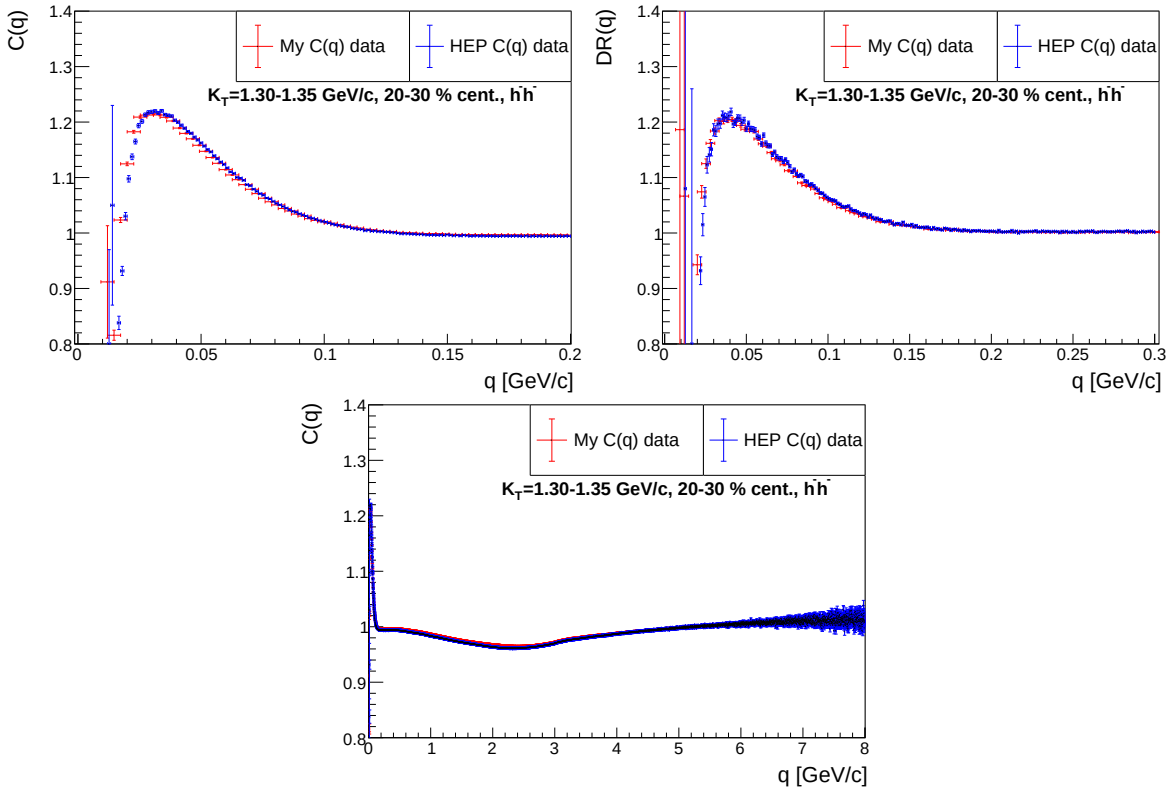
Az előző fejezetben részletesen tárgyaltuk azt, hogy milyen módszert használtunk a korrelációs függvények meghatározásához és bemutattuk az illesztés eredményeit.

Most a negatív pionpárok esetén nyert $C(q)$, $DR(q)$ adatait hasonlítottuk össze a [27] analízis eredményeivel. Az összehasonlítást a 11. ábra mutatja. Látható, hogy az alacsony q tartománybeli adatok kis, hibahatáron belül térnek el a referenciától. Valamint észrevehető, hogy kevesebb adatpont van rajta. Utóbbi oka az, hogy az analízis során nem tudtuk az összes adatot felhasználni, mivel a megírt programok párhuzamosított futtatásakor (feltehetőleg) technikai hibák léptek fel az LXPLUS HTCondor ütemezőrendszerében [46], ami felügyelte a párhuzamosítást. Ennek oka, hogy bár ez a rendszer nagy számításigényű feladatokra van kitalálva, a beküldött 1000 db (ennyi részre bontották szét az adatokat, hogy párhuzamosan lehessen futtatni az analízist rajtuk és ne egymás után egyesével, amivel jelentő időt spóroltunk) analízis input futtatása fájlerési hibák keletkeztek. A teljes q tartományra nézve a $C(q)$ összehasonlítást látható, hogy „középen” egy horizontális elcsúszás. Erre viszont jelentősebb figyelmet nem fordítottunk, ugyanis a paraméterek viselkedését ezen tartomány elhanyagolható mértékben befolyásolja.

A különböző osztályonként kapott paraméter eredmények összehasonlítását mutatjuk be a következő fejezetekben. Az illesztések esetén a kapott paraméterek az E függelék táblázataiban találja az olvasó.

3.3. A Lévy-skálaparaméter eredményei

Az R Lévy-skála paraméter a részecskeforrás térbeli méretének jellemzésére szolgál. Nevezhető egy általánosított homogenitási paraméternek annak fényében, hogy a Gauss-forrás esetén ez pontosan a homogenitási hossznak (vagy sugárnak) felel meg (lásd az 1.3.3 és 1.3.4. fejezetekben).



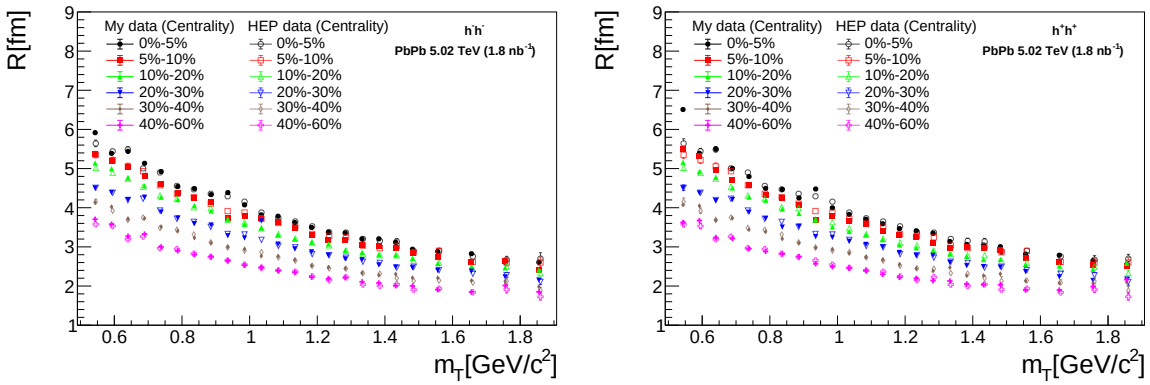
11. ábra. A korrelációs eredmények összehasonlítása a HEP adataival. A bal felső képen a $C(q)$, a jobb felsőn a $DR(q)$ korrelációs tartománybeli összehasonlítása, alul pedig a $C(q)$ teljes q tartományára vett összehasonlítása látható a HEData $C(q)$, $DR(q)$ referencia adataival.

3.3.1. Tendenciák összehasonlítása

Azt várjuk, hogy a nagyobb átlagos transzverz impulzussal rendelkező részekék kisebb sugarú homogenitási tartományokban keletkezzenek, ahol a centralitás százalékos értéke kisebb.

Az eredeti analízis eredménye megfelelően mutatja, hogy ez a feltételezés igaz. Az összehasonlítást pedig a 12. ábra illusztrálja üres és teli markeres megkülönböztetéssel. Itt tehát a Lévy -skála paraméter az $m_T = \sqrt{K_T^2 + m^2}$ (ahol itt K_T az osztályok középértéke) transzverz tömeg függvényében ábrázolva, ami jól látható csökkenő tendenciát mutat, igazolva a feltevésünket. Az ábrán egyértelműen látszik a skála paraméter centralitás függése is. Eszerint tehát R értéke nagyobb a centrálisabb ütközések esetén, mint a perifférikusabb esetekben, ami megerősíti a térbeli eloszlás jellemzését.

Az adatokon szintén szépen megmutatkozik, hogy az eredeti analízistől a vizsgálat során nyert eredmények csak a hibahatáron belül térnek el. A legnagyobb, már szinte hibahatáron belüli eltérést a kis impulzuskülönbséges esetén észlelhető. Ez szintén megegyezik az előző fejezeteken ismertett effektusok hatásaival. A továbbiakban ezt a csökkenés analizáljuk részletesebben.

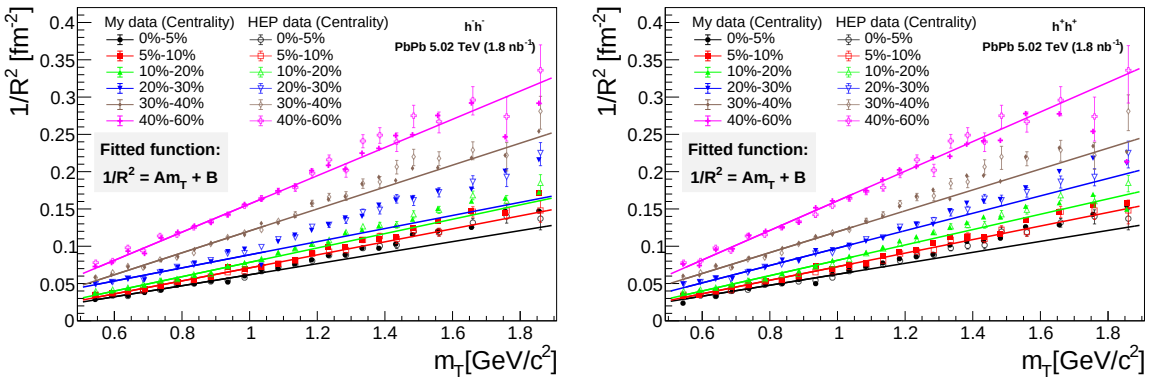


12. ábra. Az analízisünk során kapott Lévy-skála paraméter eredményeinek összevetése az HEPData 4. táblázatának adatpontjaival. Baloldalt a negatív, jobboldalt a pozitív részecskepárok esete látható.

3.3.2. A hidrodinamikai skálázás és nukleonszámfüggés

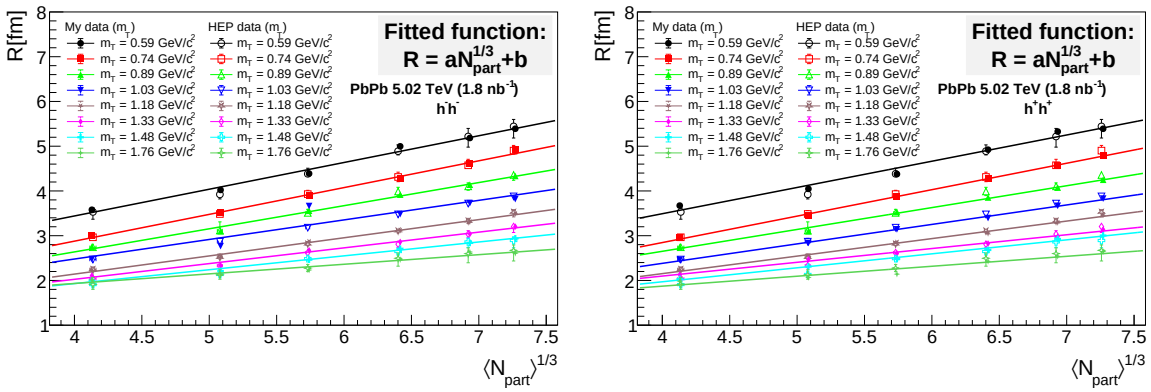
A hidrodinamikai modellt ebben a dolgozatban nem részleteztük, azonban részletes leírást és eredményeket olvashat róla az olvasó a [14, 47, 48] forrásokban. Jelenleg csak annyit említünk meg, hogy a modell $1/R^2$-re lineáris skálázást mond. Fontos megjegyezni, hogy ezt Gauss-forrásokra mondja ki, azonban továbbra is hasznos megilleszteni egy lineáris $1/R^2 = Am_t + B$ függvényt, hogy lássuk, hogy megmarad e a skálázás.

Az eredeti eredményei azt mutatták, hogy ez a lineáris skálázása az $1/R^2$-nek szépen megmarad. Az A és B paramétereknek fontos hidrodinamikai jelentése van a hadron kifagyásra vonatkozólag, amiről részletesen megint csak a [14, 17] forrásokból lehet tájékozódni. A mi jelenlegi szempontunkból csak az az érdekes, hogy mennyire mutatják adataink a lineáris skálázás megmaradását. Erre a választ a 13. ábra szolgáltatja. Az



13. ábra. A kapott $1/R^2$ eredmények az m_T függvényében, az azokra való lineáris illesztések és a HEPData 5. táblázatában lévő referencia pontokkal való összehasonlítás. Baloldalt a negatív, jobboldalt a pozitív részecskepárok esete látható.

eredmények ez esetben is statisztikailag elfogadható eredményt mutatnak.



14. ábra. A kapott R eredmények az $\langle N_{part}\rangle$ függvényében, az azokra való lineáris illesztések és a HEPData 8. táblázatában lévő referencia pontokkal való összehasonlítás. Baloldalt a negatív, jobboldalt a pozitív részecskepárok esete látható.

A geometriai jelentés további bizonyítékát kapjuk, ha ábrázoljuk az R értékeket a Global Observables (GO) csoport által számított ütközésenként átlagosan keletkező nukleonok $\langle N_{part}\rangle$ számának függvényében, ami utóbbi a forrás kezdeti térfogatát reprezentálja. Mivel itt egydimenziós paraméterezést használtunk ezért az értékek köbgyökével kell ábrázolni a skála paramétert. Az átláthatóság miatt csak 8 darab K_T értékre történt az egyenes illesztés. Jól látható a 14. ábra bal képén, hogy a geometriai interpretációt megkaptuk és a reprodukciót itt is a hibahatáron belül kaptuk meg. A lineáris illesztések hibáit tekintve eredményül azt kaptuk, hogy a R fizikai jelentése valóban térfogat skálázó jellegű.

3.4. Az α Lévy-stabilitási index

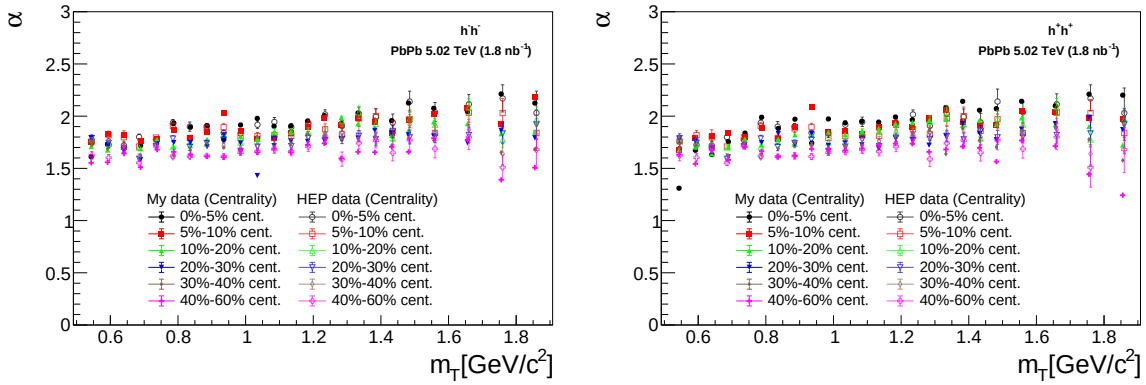
A legegyszerűbb legáltalánosabb Lévy-eloszlás az α paramétertől függően vissza képes adni a Gauss-eloszlást. A stabilitási index azt adja meg, hogy mennyivel tér el a Gauss-eloszlástól. Másképp fogalmazva, hogy mennyivel kisebb az α, mint kettő. Ugyanis kettő felett az eloszlás nem stabil így ilyen értékek mérése ellentmondásos lenne.

3.4.1. A transzverz impulzusfüggés vizsgálata

A [27] kutatás adatai a fentieknek megfelelően azt mutatták, hogy a legtöbb esetben valóban kettő alatt volt α értéke. Azokban az esetekben, amikor pedig felette volt a hibahatár visszanyúlt kettő alá. Azt találták, hogy a konstans függvények illesztése nem fogadható el statisztikailag, viszont lehet találni olyan centralitásosztály régiókat, amikben ezt meg lehet tenni. Ezek az $m_T \in [1.5, 2]$ intervallumra átlagolt α értékek növekvő tendenciát mutatnak a centralitás növekedésével. Így a kutatás szerint nincs messze a forrás a Gauss-eloszlástól, és a centralitás csökkenésével (tehát a centrálisabb ütközések esetén) ez egyre jobban eltér.

A vizsgálatunk során nyert m_T függés összehasonlítását a 15. ábra illusztrálja. Az

adatpontok többsége itt sem mutat hibahatáron kívüli eltérést a HEPData adatokkal kivéve egy darab pontot. Az átlagolás mi is elvégeztük és látható a csökkenő tendencia a

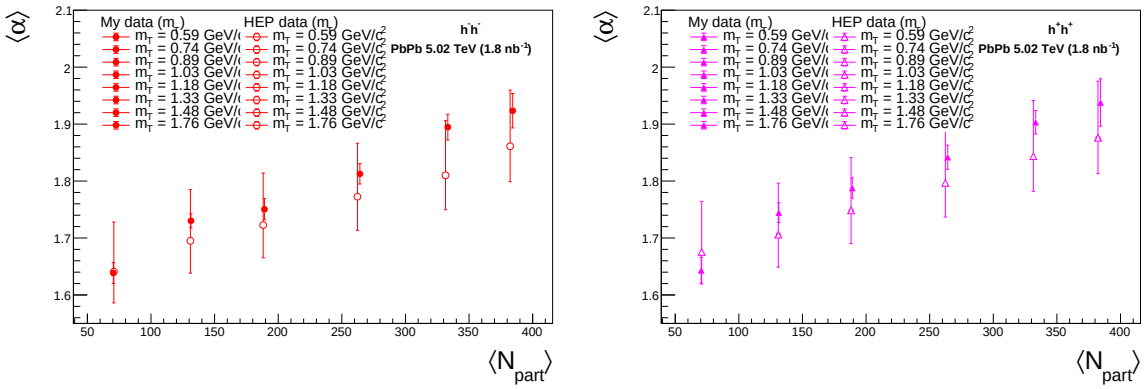


15. ábra. A Lévy-stabilitási paraméter transzverz tömegfüggésének eredményei a HEPData 9. táblázatában lévő referencia adatokkal való összehasonlítás ábrázolása. Baloldalt a negatív, jobb oldalt a pozitív részecskepárok esete látható.

centrálisabb ütközések esetében. Az eredmények többsége hibahatáron belül megegyezik, azonban látható egy kiugró pont is. Mivel ebből egy darab van, ezt statisztikailag elfogadhatónak vesszük, az eddigi eredmények tükrében.

3.4.2. A nukleonszámfüggés vizsgálata

Ebben az esetben is elvégeztük a kapott átlagok nukleonszámfüggésnek ábrázolását, ami a [27] analízisnek megfelelően lineáris kapcsolatot mutatot. Az illesztést és az összehasonlítást ebben az eseteben a 16. ábra mutatja.

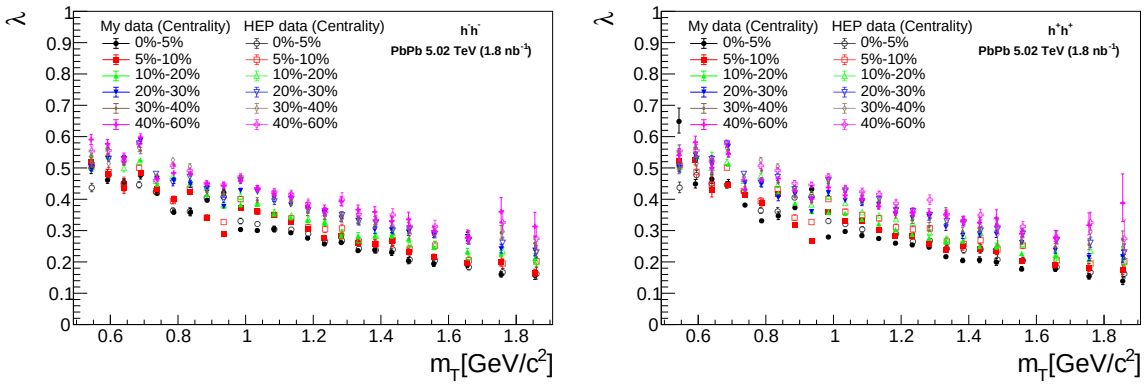


16. ábra. Az átlagos Lévy-skála paraméter nukleonszámfüggésének összehasonlítása a HEPData10. táblázatában lévő referencia adatokkal. Baloldalt a negatív, jobb oldalt a pozitív részecskepárok esete látható.

3.5. A λ korreláció erősség m_T függése

A λ paraméter a korreláció erősségét írja le, ami a Bose-Einstein korreláció hatására a korrelációs csúcs magasságát jelenti, mivel ez a korrelációs függvény $q = 0$-ra való extrapolálásából adódik. A kaotikus pion termelésben a λ értéke főleg a mag-glóra model alapján határozódik meg. A [27] analízisben a várt $1 > \lambda > 0$ értékek adódtak, ahogy azt az 1.2.2. fejezetben a mag-glória modell tárgyalásának megfelelően vártuk is. A kutatásban erős csökkenő m_T valamint egy gyenge növekvő tendenciát figyeltek meg a centralitás függvényében.

Az általunk kapott lambda paraméterek összehasonlítását a [27] kutatáséval a 17. ábra mutatja. Látható, hogy a hibahatáron kívüli eltérések nem mutatkoznak itt sem és visszakaptuk a csökkenő tendenciát is. Azt is lehet látni továbbá, hogy λ kisebbnek adódik a centrálisabb esetekben, mint a perifériku sabbakban. Ez szépen mutatja, hogy glóriában lévő részecskék száma magasabb a centrálisabb ütközésekben, mint a perifériku sak esetében.



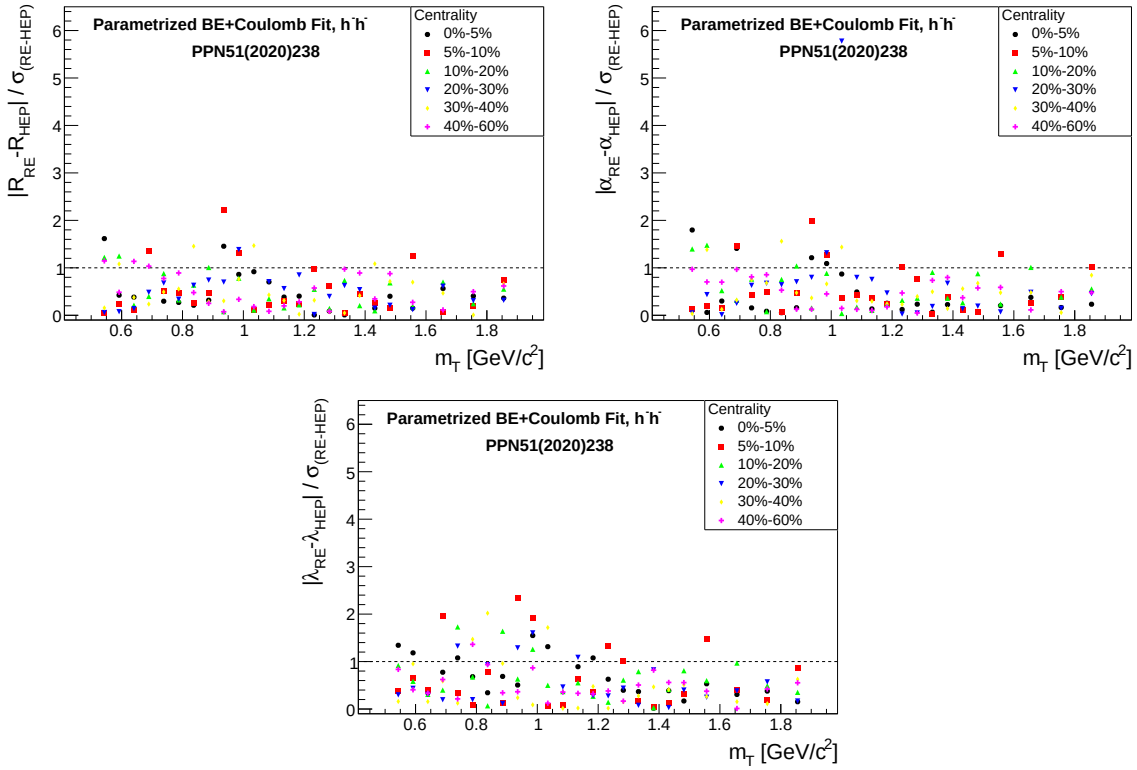
17. ábra. A λ paraméter centralitás és m_T függésének összehasonlítása a HEPData 11. táblázatában lévő adatokkal. Baloldalt a negatív, jobb oldalt a pozitív részecskepárok esete látható.

Itt megemlítjük, hogy az m_T függés magyarázatára még nincs megfelelő modell, azonban figyelembe kell venni, hogy a részecske azonosítást kihagytuk az . A [27] kutatásban megvizsgálták a részecskefüggést a pionpárok számarányának segítségével és azt találták végeredményül, hogy a csökkenő tendenciát m_T-ben az eloszlásba belevett részecskék fajtái okozzák.

3.6. Az eltérések további vizsgálata

A kapott eredményekben az látható, hogy egy-egy pont kívül esik a hibákon. Ez annak is köszönhető, hogy a B(q) eloszlásban egy randomitás faktor is belejátszik az eredményekbe. Ezt a zajt vehetjük úgy, hogy normális eloszlású és azt mondjuk, hogy statisztikailag akkor elfogadható a reprodukció ha az adatok 67% százaléka egy szigmán belül tér csak el az eredetitől. Az alábbi ábrák mutatják az R, α, λ paraméterek relatív

eltérését HEPData adatpontoktól. Ezek számszerűen is alátámasztják a reprodukció eredményességét. A 20. ábra képei csak a negatív részecskepárok eltéréseit mutatják és a pozitív részecskepárok esetében kapott eltéréseket az olvasó a D függelékben láthatja. Így tehát a reprodukció sikeresnek jelenthető ki.



18. ábra. Az R, α, λ, paraméterek relatív eltéréseinek ábrázolása a HEPdata adataitól a negatív részecskepárok esetén.

4. Összegzés

Jelen dolgozatnak két fő célja volt. Az első, hogy egy tömör összefoglalót nyújtson a nehézion-fizikában használt kvantumstatisztikus alapjelenségekkel kapcsolatban, azok bemutatásával és elmagyarázásával. Ezenfelül egy, a CMS-kollaboráció által publikált [27] cikkben tárgyalt eredmények reprodukálásával bemutattuk ennek gyakorlati részét és az eredmények megismételhetőségét.

Az elméleti modellek ismertetése után bemutattuk a CERN LHC hadronütköztetőjének detektor rendszerét, amivel a jelen dolgozatban is analizált 2018-as $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV-os energiájú ólom-ólom mag ütköztetések mérését hajtották végre. Ezután részleteztük az ezen adatokon végrehajtott analízis módszertanát, beleértve az adatszelekciót és a korrelációs függvények mérésének technikáját.

Az analízis reprodukálása során egy kulcsfontosságú tapasztalattal lettünk gazdagabbak, ami a programok futtatásának párhuzamosításával keletkezett. A szűrés után a kapott paraméterek megfeleltek a várakozásainknak, és statisztikailag elfogadható módon egyeztek meg a CMS-kollaboráció eredményeivel. Az esetleges egy-egy pontonként jelentkező eltérések feltehetően az eseménykeverés véletlen létéből származtathatóak. Megjegyzendő, hogy a kapott eredményekben kevesebb adatpont szerepel a kiszűrt, hibát adó fájlokból adódóan. Ez azonban az alakokban minimális eltérést adott csak a korrelációs függvényekben. Így összességében a reprodukció sikeresnek tekinthető.

Ez az eredmény fontos, mivel a használt és bemutatott módszerek alkalmasak a (jelen dolgozatban részletesebben nem ismertetett) háromrészecske-korrelációk mérésére. Ehhez azonban első lépésként elengedhetetlen volt látni, hogy programjaink mihez először az ismert adatokat megfelelően tudják e reprodukálni. Jelen dolgozat szerzője a jövőben ezen a területen folytatja további kutatásait és

Köszönetnyilvánítás

Külön köszönettel tartozom Csanád Máténak, amiért csatlakoztatott a CMS-kollaboráció munkájába, adatokat szolgáltatva az analízisem elvégzéséhez és szakmai hozzáértésével segítette jelen dolgozat létrejöttét. Valamint külön köszönet illeti Csengeri Kamillát, az ELTE atomfizikai tanszék femtoszkópia kutatócsoportjának tagját a munkám során felmerülő problémák segítésében és a felmerülő kérdések meválaszolásában.

5. A kutatás továbbgondolása

A két- és háromrészecskés korrelációk analízise segíthet megérteni a mag-glória modell és a termalizációs mag feltételezés határait. Az elmondottak fényében továbbhaladhatunk a háromrészecskés korreláció tárgyalására. A háromrészecskés korrelációs függvényt az alábbi módon definiáljuk:

$$C_3(q_1, q_2, q_3) = \frac{N_3(q_1, q_2, q_3)}{N_1(q_1)N_1(q_2)N_1(q_3)}, \tag{5.1}$$

ahol N_3 a háromrészecskés, N_1 az egyrészecskés momentumeloszlás. A dolgozat következtetése alapján feltételezett szimmetrizált Lévy-eloszlás mellett a korrelációs függvény analitikus formában is megadó, amikben megjelennek a két- és háromrészecskés korrelációs erősségi paraméterek. Ezeknek a kis impulzuskülönbségre való határértékei:

$$\lambda_2 \equiv C_2(q_{12} \to 0) - 1, \qquad \lambda_3 \equiv C_3(q_{12} = q_{13} = q_{23} \to 0) - 1. \tag{5.2}$$

Egyidejű λ_2 és λ_3 illesztésével pedig következtethetünk a forrás részleges koherenciájára. Így megtudva milyen részecskék között lép fel korreláció és melyeken nem.

Hivatkozások

[1] Michael Annan Lisa és Scott Pratt és Ron Soltz és Urs Wiedemann. Femtoscopy in relativistic heavy ion collisions: Two decades of progress. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 55(1):357–402, December 2005.

[2] Francesco Becattini. What is the meaning of the statistical hadronization model? In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 5, page 175. IOP Publishing, 2005. FOCUS ON MULTIPLICITY: International Workshop on Particle Multiplicity in Relativistic Heavy Ion Collisions, 17–19 June 2004, Bari, Italy.

[3] R. Hanbury Brown és R. Q. Twiss. A test of a new type of stellar interferometer on sirius. *Nature*, 178:1046–1048, 1956.

[4] A. Pais G. Goldhaber és S. Goldhaber és W.-Y. Lee. Influence of bose-einstein statistics on the antiproton proton annihilation process. *Physical Review*, 120:300, 1960.

[5] R.L. Workman et al. Review of particle physics: Charged pion ($\pi^{\pm}$) listing, 2023. Particle Data Group.

[6] R.L. Workman et al. Review of particle physics: Charged pion ($\pi^{\pm}$) listing, 2023. Particle Data Group.

[7] B. Bai, J. Liu, S. Zhang, Y. He, M. Le, W. Wang, and Z. Xu. Transient first-order interference of two independent thermal light beams. *Journal of the Optical Society of America B*, 33(4):643–647, 2016.

[8] Satyendra Nath Bose. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, 26:178–181, 1924.

[9] Albert Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. zweite abhandlung. In Dieter Simon, editor, *Einstein's Collected Papers*. Wiley Online Library, 2005. Első megjelenés: 1925.

[10] H. Minkowski. *Raum und Zeit*, pages 54–71. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1922.

[11] ALICE Collaboration. Femtoscopy of pp collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 0.9$ and 7 tev at the lhc with two-pion bose-einstein correlations. *Physical Review D*, 84(11), December 2011.

[12] STAR Collaboration. Pion interferometry in Au + Au and Cu + Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ and 200 gev. *Phys. Rev. C*, 80:024905, Aug 2009.

[13] PHENIX Collaboration Andrew Glenn. Recent hbt results in au+au and p+p collisions from phenix. *Nuclear Physics A*, 830(1):833c–836c, 2009. Quark Matter 2009.

[14] Csanád Máté. *Nagyenergiás atommagütközések téridőbeli szerkezete*. Mta doktori értekezés, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Atomfizikai Tanszék, Budapest, 2019.

[15] Albert Einstein. Zur elektrodynamik bewegter körper [adp 17, 891 (1905)]. *Annalen der Physik*, 517:194–224, 2005.

[16] Scott Pratt. Pion interferometry of quark-gluon plasma. *Phys. Rev. D*, 33:1314–1327, Mar 1986.

[17] T. Csörgő. Higher order bose-einstein correlations for systems with large halo. *Physics Letters B*, 409(1–4):11–18, September 1997.

[18] Dániel Kincses és Márton Nagy és Máté Csanád. Lévy walk of pions in heavy-ion collisions. *Commun. Phys.*, 8:55, 2025.

[19] Chun Shen. Studying QGP with flow: A theory overview. *Nucl. Phys. A*, 1005:121788, 2021.

[20] N.J. Abdulameer (PHENIX Collaboration). Measurements at forward rapidity of elliptic flow of charged hadrons and open-heavy-flavor muons in au+au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ gev. *arXiv preprint*, September 2024.

[21] Morad Aaboud és (ATLAS Collaboration). Fluctuations of anisotropic flow in pb+pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ tev with the atlas detector. *JHEP*, 01:051, 2020.

[22] Néstor Armesto, Andrea Dainese, Carlos A. Salgado, and Urs Achim Wiedemann. Testing the color charge and mass dependence of parton energy loss with heavy-to-light ratios at bnl rhic and cern lhc. *Phys. Rev. D*, 71:054027, Mar 2005.

[23] M. Lv, Y.G. Ma, G.Q. Zhang, J.H. Chen, and D.Q. Fang. Nuclear modification factor in intermediate-energy heavy-ion collisions. *Physics Letters B*, 733:105–111, 2014.

[24] Máté Csanád and Imre Májer. Equation of state and initial temperature of quark gluon plasma at rhic. *Open Physics*, 10(4):850–857, 2012.

[25] B. Abelev és J. Adam és D. Adamová és tsaik (The ALICE Collaboration). Elliptic flow of identified hadrons in pb–pb collisions at sqrt(snn) = 2.76 tev. *Journal of High Energy Physics*, 2015:190, 2015.

[26] Sándor Lökös. Centrality dependent lévy-stable two-pion bose-einstein correlations in $\sqrt{s_{nn}} = 200$ gev au+au collisions at the phenix experiment. *Universe*, 4(2):31, February 2018.

[27] Armen Tumasyan et al. Two-particle Bose-Einstein correlations and their Lévy parameters in PbPb collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=5.02 TeV. *Phys. Rev. C*, 109(2):024914, 2024.

[28] Hidetoshi Nishimori and Gerardo Ortiz. *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena*. OUP Oxford, December 2010. Google-Books-ID: F5syAwAAQBAJ.

[29] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, volume 3 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 3 edition, 1977. See especially §132 for Coulomb scattering, and §136 for identical particles.

[30] Yu.M. Sinyukov, R. Lednicky, S.V. Akkelin, J. Pluta, and B. Erazmus. Coulomb corrections for interferometry analysis of expanding hadron systems. *Physics Letters B*, 432(3):248–257, 1998.

[31] M.G. Bowler. Coulomb corrections to bose-einstein corrections have greatly exaggerated. *Physics Letters B*, 270(1):69–74, 1991.

[32] M. Csanád, S. Lökös, and M. I. Nagy. Expanded empirical formula for coulomb final state interaction in the presence of lévy sources. *Physics of Particles and Nuclei*, 51(3):238–242, May 2020.

[33] The CMS Collaboration and Christos Leonidopoulos. The cms experiment at the cern lhc. *Journal of Instrumentation*, 3(08):S08004, aug 2008.

[34] CERN AC. Cutaway view of CMS detector. https://home.web.cern.ch/resources/image/experiments/cms-images-gallery, 1998. Image ID: CERN-DI-9803027-1.

[35] CMS collaboration, Vardan Khachatryan, AM Sirunyan, A Tumasyan, W Adam, T Bergauer, M Dragicevic, J Erö, C Fabjan, M Friedl, et al. Cms tracking performance results from early lhc operation. *The European Physical Journal C*, 70:1165–1192, 2010.

[36] CERN. EOS - Open Storage Documentation. Webpage, n.d. Accessed: 2025-05-21.

[37] The CMS Collaboration. Description and performance of track and primary-vertex reconstruction with the cms tracker. *Journal of Instrumentation*, 9(10):P10009–P10009, October 2014.

[38] CMS Collaboration. Production of charged pions, kaons, and (anti-)protons in pb-pb and inelastic pp collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=5.02 tev tev. *Physical Review C*, 101(4), April 2020.

[39] Xiaofeng Luo. Unified description of efficiency correction and error estimation for moments of conserved quantities in heavy-ion collisions. *Physical Review C*, 91(3), March 2015.

[40] CMS Collaboration. Bose-einstein correlations of charged hadrons in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ tev. *Journal of High Energy Physics*, 2020(3), March 2020.

[41] F. James and M. Roos. Minuit - a system for function minimization and analysis of the parameter errors and correlations. *Computer Physics Communications*, 10(6):343–367, 1975.

[42] CMS Collaboration. Bose-einstein correlations in pp, pPb, and pbpb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 0.9 - -7$ tev. *Phys. Rev. C*, 97:064912, Jun 2018.

[43] D. Kincses, M. I. Nagy, and M. Csanád. Coulomb and strong interactions in the final state of hanbury-brown–twiss correlations for lévy-type source functions. *Phys. Rev. C*, 102:064912, Dec 2020.

[44] Márton Nagy, Aletta Purzsa, Máté Csanád, and Dániel Kincses. A novel method for calculating bose–einstein correlation functions with coulomb final-state interaction. *The European Physical Journal C*, 83(11), November 2023.

[45] CMS Collaboration. Two-particle Bose-Einstein correlations and their Lévy parameters in PbPb collisions at $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}} = 5.02$ TeV. HEPData (collection), 2023. https://doi.org/10.17182/hepdata.134676.

[46] Htcondor overview, 2025.

[47] A. N. Makhlin and Yu. M. Sinyukov. The hydrodynamics of hadron matter under a pion interferometric microscope. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 39(1):69–73, 1988.

[48] T. Csörgő and B. Lörstad. Bose-einstein correlations for three-dimensionally expanding, cylindrically symmetric, finite systems. *Physical Review C*, 54(3):1390–1403, September 1996.

A. Függelék: Az analízis során használt adatok

Az 1. táblázat a ROOT Tree adatstruktúrájának az analízis során használt elemeit részletezi a [27] hivatkozás alapján. A táblázatban szerepelt adatok már csak az általunk felhasznált, az analízis szempontjából fontos mennyiség szerepel és nem az összes jellemző.

Kódnév	**Típus (bit)**	**Physical meaning (notation)**
nRun	int (32)	Egy folyamatos adatgyűjtési ciklus azonoítója
nEv	int (32)	Esemény szám
nLumi	int (32)	Luminozitás
nBX	int (32)	Beam package number
nTrk	int (32)	Multiplicitás (N_{trk})
nVtx	int (32)	Vertex szám (Vtx)
HFsum	float (32)	A centralitás meghatározáshoz szükséges adat
EP2MbyPi	float (32)	
EP2PbyPi	float (32)	Eseménysíkhoz tartozó adatok
EP3MbyPi	float (32)	
EP3PbyPi	float (32)	
xVtx	float (32)	Fő vertex x-koordináta (x_{vtx})
yVtx	float (32)	Fő vertex y-koordináta (y_{vtx})
zVtx	float (32)	Fő vertex z-koordináta (z_{vtx})
trkCharge[nTrk]	bool (1)	Töltés (ch)
trkNHit[nTrk]	char (8)	Pixel és sávos detektorban a találatok száma (N_{hit})
trkNPixelHit[nTrk]	char (8)	Pixel detektorban a találatok száma ($N_{\text{pixel hit}}$)
trkEta[nTrk]	float (32)	Pszeudorapiditás (η)
trkPhi[nTrk]	float (32)	Azimutszög (ϕ)
trkPt[nTrk]	float (32)	Transzverz impulzus (p_T)
trkPtErrRel[nTrk]	float (32)	Relatív p_T error (δp_T)
trkChi2Ndf[nTrk]	float (32)	Illesztési minőség (χ^2/N_{dof})
trkDxy1Rel[nTrk]	float (32)	Transzverz távolság a vertextől ($\langle D_{xy}/\sigma_{xy}\rangle$)
trkDz1Rel[nTrk]	float (32)	Longitudinális távolság a vertextől ($\langle D_z/\sigma_z\rangle$)

1. táblázat. A mentett változók, azok típusa és fizikai jelentése. A `nTrk` az eseményhez tartozó pályák (trackek) száma. A táblázat forrása: ref. [27]

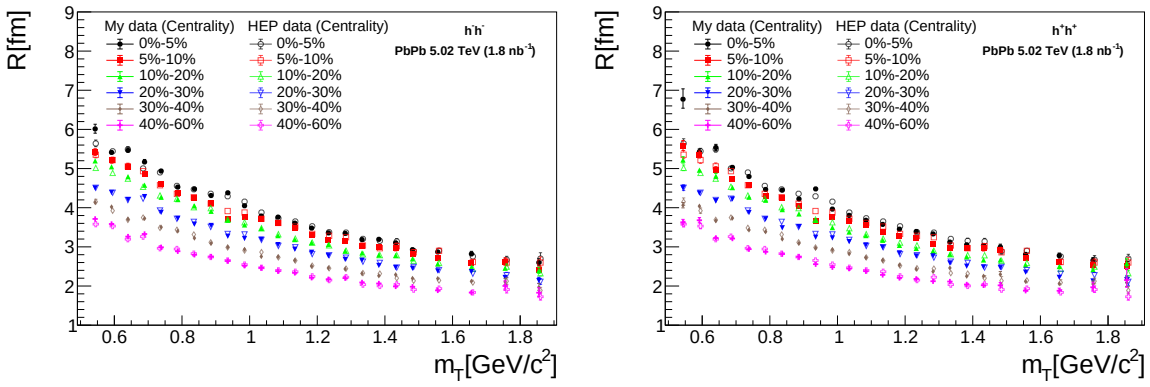
.

B. Függelék: Az új módszer eredményei

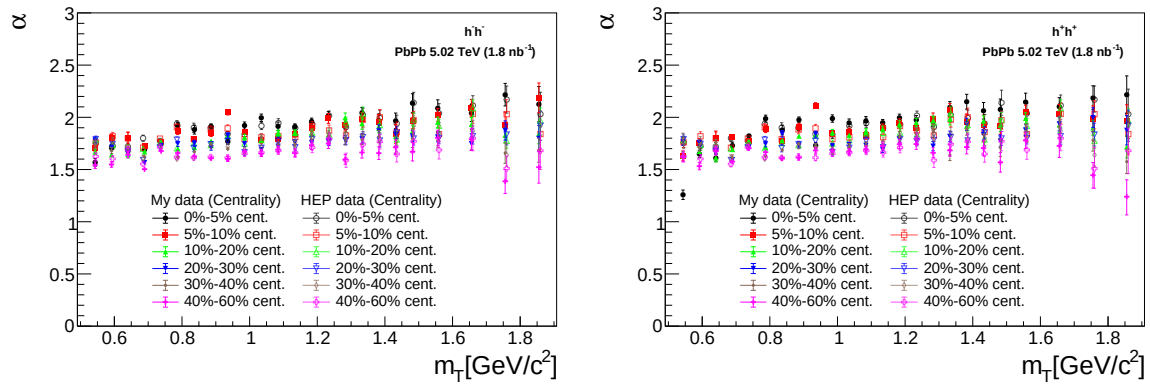
Az újfajta Coulomb-korrekcióval történő illesztés már nem önkényesen megválasztott adatokkal történő parametrizálással állítja elő a Coulomb-korrekciót, hanem a [44] kutatásban leírtaknak megfelelően. Az illesztést ezen korrekcióval is elvégeztük és legfőbb eredmények az alábbi ábrákon láthatóak. Összességében észrevehető, hogy az eltérés nagyobb, hiszen ez egy másik módszer, mint mivel a HEPData adatait megkapták.

Továbbá szabad szemmel látható, hogy az eltérés még mindig elfogadható statisztikailag. Azonban fontos hozzátenni, hogy ez a módszer a korrelációs függvények illesz-

tésekor lassabbnak bizonyult. Ez annak tudható be, hogy ez az illesztés elvégez egy integrálást az egyszerű paraméterkeresés helyett.



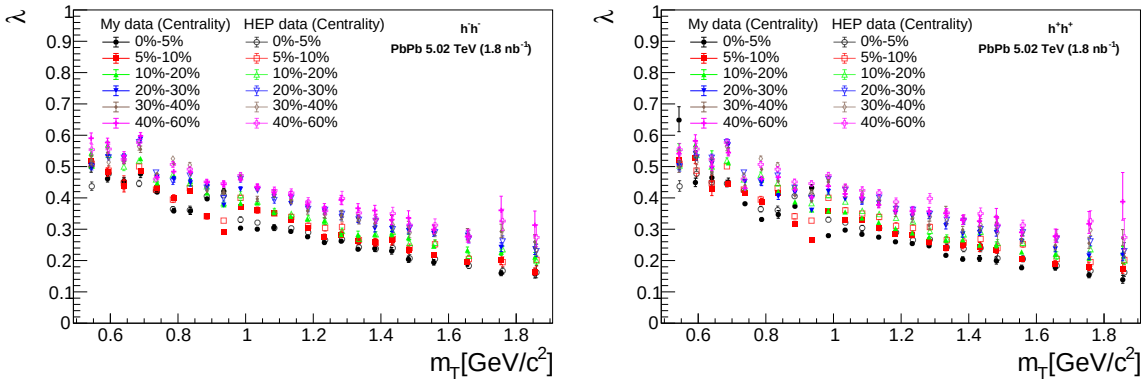
19. ábra. Az analízisünk során kapott Lévy-skála paraméter eredményeinek összevetése a HEPData adatpontjaival az [44] kutatásban használt új Coulom-korrekciós módszert használva. Baloldalt a negatív, jobb oldalt a pozitív részecskepárok esete látható.



20. ábra. Az analízisünk során kapott Lévy-stabilitási paraméter eredményeinek összevetése az HData adatpontjaival az [44] kutatásban használt új Coulom-korrekciós módszert használva. Baloldalt a negatív, jobb oldalt a pozitív részecskepárok esete látható.

C. Függelék: Vágások a szisztematikus hibaszámításhoz

A szisztematikus hiba számításához jelöljük ismét a paramétervektort $\mathcal{P} = (\lambda, R, \alpha)$ módon a 2.2.4. fejezethez hasonlóan. Ezt most aszerint parametrizáljuk, hogy melyik centralitás és K_T osztályban kaptuk meg a paramétereket és jelöljük a centralitás osztályokat stílusosan egy kalligrafikus $\mathscr{C}$-vel. Jelöljük az alapértékeket mindegyik osztálynál $\mathcal{P}^n_{\mathcal{V}}(K_T, \mathscr{C})$ módon. Ezek mellett parametrizáljuk a paramétervektort aszerint,



21. ábra. Az analízisünk során kapott λ paraméter eredményeinek összevetése az HData adatpontjaival az [44] kutatásban használt új Coulom-korrekciós módszert használva. Baloldalt a negatív, jobb oldalt a pozitív részecskepárok esete látható.

hogy melyik $\mathcal{V}$-vel, hogy melyik variációt (1-est vagy 2-est) vettük és n-el pedig azt, hogy miben vettük a variációt, vagyis a vágást (z_{vtx}, p_T, $\delta p_T, stb.$) melyik. Tehát a különböző eredmények paramétervektorát jelöljük így $\mathcal{P}^n_{\mathcal{V}}(K_T, \mathscr{C})$. A szisztematikus hiba ezekből a paraméterekre úgy kapható, hogy vesszük az átlagos éltérést az alapértelmezett értékektől mind azokban az esetekben, amikor a $\mathcal{P}^n_{\mathcal{V}}(K_T, \mathscr{C}) > \mathcal{P}^0(K_T, \mathscr{C})$ és mind az ellenkező esetben is. A nagyobb értékek számosságát jelöljük $N^{n,>}_{\mathcal{V}}$ és fordítottak számosságát pedig $N^{n,<}_{\mathcal{V}}$. Ezekkel a jelölésekkel felírható a szisztematikus hibák számolása a nagyobb és kisebb értékek esetében általánosan:

$$\delta P^{>}(K_T, \mathscr{C}) = \sqrt{\sum_{n=\text{cuts}} \frac{1}{N^{n,>}_{\mathcal{V}}} \sum_{\mathcal{V}\in\mathcal{V}^{>}_{\setminus}} (\mathcal{P}^n_{\mathcal{V}}(K_T, \mathscr{C}) - \mathcal{P}^0(K_T, \mathscr{C}))^2}, \tag{C.1a}$$

$$\delta P^{<}(K_T, \mathscr{C}) = \sqrt{\sum_{n=\text{cuts}} \frac{1}{N^{n,<}_{\mathcal{V}}} \sum_{\mathcal{V}\in\mathcal{V}^{<}_{\setminus}} (\mathcal{P}^n_{\mathcal{V}}(K_T, \mathscr{C}) - \mathcal{P}^0(K_T, \mathscr{C}))^2}. \tag{C.1b}$$

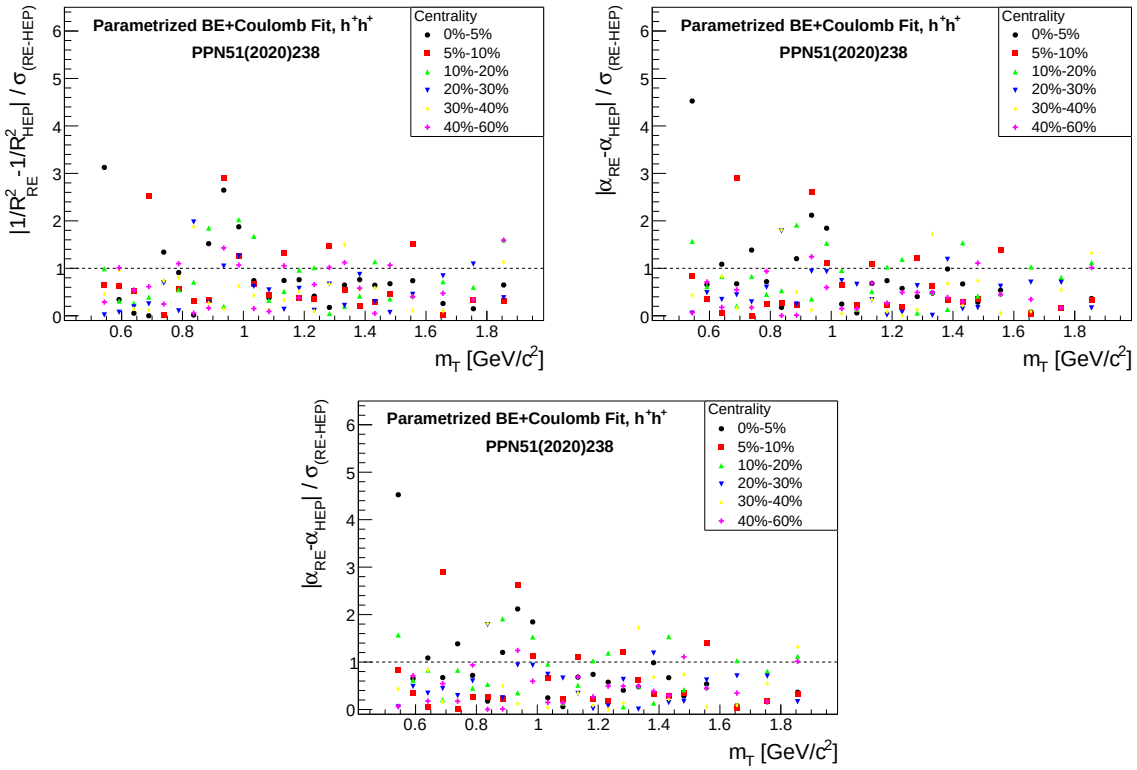
ahol tehát $\delta P^{>/<}(K_T, \mathscr{C})$ a megfelelő szisztematikus hibák [27]. A különböző vágásvariációkat a 2. táblázat tartalmazza.

D. Függelék: Relatív eltérések pozitív részecskepárok esetére

A pozitív részecskerák eseténél kapott relatív eltéréseket a 22. ábra mutatja. Látható, hogy itt is teljesül, hogy az adatok 67%- egy szigmán belül van, ami az eredmények sikerességét mutatja.

n	Szisztematikus forrás	Alapértelmezett	$\mathcal{V}_1$	$\mathcal{V}_2$
1	z-vertex vágás	< 15 cm	< 12 cm	< 18 cm
2	p_T vágás	$> 0,5$ GeV/c	$> 0,55$ GeV/c	$> 0,5$ GeV/c
3	δp_T vágás	$< 10\%$	$< 5\%$	$< 15\%$
4	$\lvert\eta\rvert$ vágás	$< 0,95$	$< 0,9$	< 1
5	Pixelütések száma (N_{pixel})	> 1	> 2	> 0
6	$\chi^2/N_{\text{szab,fok}}/N_{\text{réteg}}$ vágás	$< 0,18$	$< 0,15$	$< 0,18$
7	$\lvert D_{xy}/\sigma_{xy}\rvert$ vágás	< 3	< 2	< 5
8	$\lvert D_z/\sigma_z\rvert$ vágás	< 3	< 2	< 5
9	$\Delta\eta$, $\Delta\phi$ páros vágás	$\Delta\eta_{\text{cut}} = 0,014$, $\Delta\phi_{\text{cut}} = 0,022$	$\Delta\eta_{\text{cut}} = 0,017$, $\Delta\phi_{\text{cut}} = 0,028$	$\Delta\eta_{\text{cut}} = 0,011$, $\Delta\phi_{\text{cut}} = 0,016$
10	$q_{\min}$ alsó illesztési határ	$q^0_{\min}(K_T, \text{cent.})$	$q^0_{\min} - 0,004$	$q^0_{\min} + 0,004$
11	$q_{\max}$ felső illesztési határ	$q^0_{\max}(K_T, \text{centr.})$	$0,85 \cdot q^0_{\max}$	$1,15 \cdot q^0_{\max}$
12	HF-határok centralitáshoz	Alapértékek	Alsó értékek	Felső értékek

2. táblázat. A [27] analízis által használt alapértelmezett és alternatív beállítások a szisztematikus hibák számolásához. Itt mi kalligrafikus V-vel jelöltük a paraméter variálást



22. ábra. Az R, α, λ, paraméterek relatív eltéréseinek ábrázolása a HEPdata adataitól a pozitív részecskepárok esetén.

E. Függelék: Az illesztések eredményei

A 3. fejezetben tárgyalt illesztése eredményeit az alábbi táblázatok tartalmazzák. A táblázatok alsó felében fel vannak tüntetve a [27]-as kutatás illesztéseinek eredményei is.

Saját adatok	**HEP adatbázis**
$\alpha = 1.92 \pm 0.030$	$\alpha = 1.90 \pm 0.014$
$\alpha = 1.89 \pm 0.023$	$\alpha = 1.82 \pm 0.014$
$\alpha = 1.80 \pm 0.018$	$\alpha = 1.79 \pm 0.010$
$\alpha = 1.75 \pm 0.019$	$\alpha = 1.70 \pm 0.012$
$\alpha = 1.73 \pm 0.012$	$\alpha = 1.70 \pm 0.014$
$\alpha = 1.64 \pm 0.018$	$\alpha = 1.63 \pm 0.013$

3. táblázat. A Lévy-stabilitási paraméter (α) értékei különböző adatsorokban: balra a saját illesztési eredmények, jobbra a [27] HEP adatbázis által közölt átlagértékek.

Saját illesztési adatok				
	h^-h^-		h^+h^+	
cent[%]	A $\left[\frac{c^2}{\text{fm GeV}}\right]$	B $\left[\frac{c^2}{\text{fm GeV}}\right]$	A $\left[\frac{c^2}{\text{fm GeV}}\right]$	B $\left[\frac{c^2}{\text{fm GeV}}\right]$
0-5	$0,07 \pm 0,006$	$-0,01 \pm 0,005$	$0,07 \pm 0,008$	$-0,01 \pm 0,006$
5-10	$0,09 \pm 0,006$	$-0,02 \pm 0,005$	$0,09 \pm 0,006$	$-0,02 \pm 0,005$
10-20	$0,10 \pm 0,003$	$-0,02 \pm 0,003$	$0.10 \pm 0,004$	$-0,02 \pm 0,003$
20-30	$0,09 \pm 0,0018$	$-0,00 \pm 0,015$	$0,12 \pm 0,007$	$-0,02 \pm 0,006m$
30-40	$0,15 \pm 0,007$	$-0,03 \pm 0,006$	$0,14 \pm 0.006$	$-0,02 \pm 0,005$
40-60	$0,19 \pm 0,009$	$-0,03 \pm 0,007$	$0,20 \pm 0,011$	$-0,04 \pm 0,009$
A referencia analízis illesztési adatai				
0–5	0.086 ± 0.003	-0.021 ± 0.003	0.084 ± 0.002	-0.019 ± 0.002
5–10	0.094 ± 0.003	-0.021 ± 0.003	0.092 ± 0.003	-0.021 ± 0.002
10–20	0.115 ± 0.003	-0.032 ± 0.003	0.110 ± 0.002	-0.028 ± 0.002
20–30	0.130 ± 0.003	-0.029 ± 0.003	0.125 ± 0.002	-0.027 ± 0.003
30–40	0.154 ± 0.005	-0.033 ± 0.004	0.154 ± 0.004	-0.033 ± 0.004
40–60	0.195 ± 0.006	-0.034 ± 0.005	0.192 ± 0.006	-0.034 ± 0.005

4. táblázat. Az $1/R^2$-m_T-re függvényre illesztett lineáris paraméterek értéke a különböző centralitásosztályok esetén: fent a saját illesztési eredmények, lent a [27] HEP adatbázis által közölt adatok.

Saját illesztési adatok				
	h^-h^-		h^+h^+	
m_T	a $\left[\frac{c^2}{\text{fm GeV}}\right]$	b $\left[\frac{c^2}{\text{fm GeV}}\right]$	a $\left[\frac{c^2}{\text{fm GeV}}\right]$	b $\left[\frac{c^2}{\text{fm GeV}}\right]$
0.59	0.60 ± 0.03	1.05 ± 0.20	0.59 ± 0.04	1.15 ± 0.25
0.74	0.60 ± 0.02	0.48 ± 0.14	0.59 ± 0.01	0.48 ± 0.07
0.89	0.52 ± 0.02	0.57 ± 0.13	0.49 ± 0.02	0.70 ± 0.11
1.03	0.44 ± 0.09	0.73 ± 0.54	0.44 ± 0.01	0.64 ± 0.06
1.18	0.41 ± 0.02	0.52 ± 0.09	0.39 ± 0.01	0.59 ± 0.08
1.33	0.35 ± 0.02	0.62 ± 0.11	0.31 ± 0.01	0.87 ± 0.08
1.48	0.31 ± 0.03	0.69 ± 0.08	0.31 ± 0.01	0.72 ± 0.08
1.76	0.21 ± 0.02	1.07 ± 0.14	0.22 ± 0.03	0.98 ± 0.18
A referencia analízis illesztési adatai				
0.59	0.60 ± 0.08	1.05 ± 0.44	0.65 ± 0.03	0.68 ± 0.35
0.74	0.60 ± 0.03	0.46 ± 0.15	0.62 ± 0.03	0.40 ± 0.17
0.89	0.51 ± 0.03	0.56 ± 0.18	0.51 ± 0.02	0.52 ± 0.14
1.03	0.44 ± 0.03	0.48 ± 0.16	0.45 ± 0.02	0.58 ± 0.15
1.18	0.41 ± 0.02	0.49 ± 0.11	0.43 ± 0.04	0.35 ± 0.23
1.33	0.36 ± 0.03	0.61 ± 0.16	0.36 ± 0.04	0.44 ± 0.25
1.48	0.31 ± 0.03	0.71 ± 0.18	0.33 ± 0.03	0.53 ± 0.16
1.76	0.27 ± 0.04	0.69 ± 0.26	0.25 ± 0.06	0.88 ± 0.32

5. táblázat. Az R-$\langle N \rangle^{1/3}$-re függvényre illesztett lineáris paraméterek értéke a különböző centralitásosztályok esetén: fent a saját illesztési eredmények, lent a [27] HEP adatbázis által közölt adatok.