1. Relációk

1. Alapfogalom. *r reláció*

1. Axióma. *Létezik reláció.*

2. Alapfogalom. *x és y r relációban áll egymással,* $\big(x \overset{r}{-} y\big)$

1.1. Definíció. $x \in r$*:* $\exists y \; \big(x \overset{r}{-} y\big) \;\vee\; \big(y \overset{r}{-} x\big)$

2. Axióma. $r = s \Leftrightarrow \big(\; \big(x \overset{r}{-} y\big) \;\Leftrightarrow\; \big(x \overset{s}{-} y\big) \; \big)$

3. Axióma. *x, y relációk:* $\exists$ *r reláció, hogy* $\big(x \overset{r}{-} y\big)$ *és* $\big(\; \big(a \overset{r}{-} b\big) \;\Rightarrow a = x \wedge b = y\big)$.

1.1. Állítás. *A 3. axiómában szereplő r egyértelmű, és* $(x, y) := r$.

1.2. Definíció. $r \subset s$*:* $\big(x \overset{r}{-} y\big) \;\Rightarrow\; \big(x \overset{s}{-} y\big)$

4. Axióma. *r reláció, P logikai függvény:* $\exists$ *s reláció, hogy* $\big(x \overset{s}{-} y\big) \Leftrightarrow \big(\; \big(x \overset{r}{-} y\big)$ *és* $P(x, y)$ *igaz*$\big)$.

1.2. Állítás. *A 4. axiómában szereplő s egyértelmű, és* $r|_P := s$.

1.3. Állítás. *r reláció, P logikai függvény:* $r|_P \subset r$

5. Axióma. *r reláció,* $\exists$ *s reláció, hogy* $\big(x \overset{s}{-} y\big) \Leftrightarrow (x \subset r \wedge y \subset r)$.

1.4. Állítás. *A 5. axiómában szereplő s egyértelmű, és* $\mathcal{P}(r) := s$.

6. Axióma. *r reláció,* $\exists s$ *reláció, hogy* $\big(\; \big(a \overset{s}{-} b\big) \;\Leftrightarrow \big(\exists x,$ *hogy* $\big(a \overset{x}{-} b\big) \;\wedge x \in r\big)\big)$.

1.5. Állítás. *A 6. axiómában szereplő s egyértelmű, és* $\bigcup r := s$.

1.3. Definíció. *r reláció,* $P(a)$ *logikai függvény igaz, ha* $\big(\; \big(x \overset{r}{-} y\big) \;\Rightarrow (a \in x \wedge a \in y)\big)$,
ekkor $\bigcap r := (\bigcup r)|_P$

1.6. Állítás. $P(x)$ *logikai függvény igaz, ha* $x \neq x$*. r, s relációk* $\Rightarrow r|_P = s|_P$.
Ekkor $\emptyset := r|_P$.

1.4. Definíció. *r reláció* ***szimmetrikus****:* $\big(x \overset{r}{-} y\big) \Rightarrow \big(y \overset{r}{-} x\big)$

1.5. Definíció. *r reláció* ***antiszimmetrikus****:* $\big(x \overset{r}{-} y\big) \wedge \big(y \overset{r}{-} x\big) \Rightarrow x = y$

1.6. Definíció. *r reláció* ***reflexív****:* $x \in r \Rightarrow \big(x \overset{r}{-} x\big)$

1.7. Definíció. *r reláció* ***tranzitív****:* $\big(x \overset{r}{-} y\big) \wedge \big(y \overset{r}{-} z\big) \Rightarrow \big(x \overset{r}{-} z\big)$

2. Függvények

2.1. Definíció. *f reláció **függvényszerű**:* $\left(x \overset{f}{-} y\right) \wedge \left(x \overset{f}{-} z\right) \Rightarrow y = z$.
Ekkor $y := f(x)$

2.2. Definíció. $(x \mapsto_f y)$ *:* $\left(x \overset{f}{-} y\right)$ *és f függvényszerű*

2.3. Definíció. *A és B relációk és f függvényszerű reláció hármasa **függvény**, ha* $(x \mapsto_f y) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B)$

3. Halmazok

3.1. Definíció. *H reláció **halmaz**:* $\left(x \overset{H}{-} y\right) \Rightarrow x = y$

3.1. Állítás. *H halmaz* $\Rightarrow$ *H függvényszerű, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív és reflexív.*

3.2. Állítás. *H halmaz* $\Leftrightarrow$ *H szimmetrikus és antiszimmetrikus.*

3.3. Állítás. $\emptyset$ *halmaz.*

3.2. Definíció. *H halmaz, P logikai függvény:* $\{x \in H | P(x)\} := H|_P \subset H$

3.3. Definíció. *H **1. rendű halmaz**, ha* $(x \in H \Rightarrow x$ *halmaz*$)$.