

19. Tétel: Az elektroyenge elmélet alapjai: spontán szimmetria-sértés, Goldstone-bozonok, Higgs-mechanizmus, W és Z tömege és csatolása, lepton és kvark multiplettek

2004. június 24.

1. A közvetítő vektorbozonok szükségessége

A gyenge kcsh közvetítő részecskék nélkül nem renormálható elmélet. Renormálható elméleteknél követelmény:

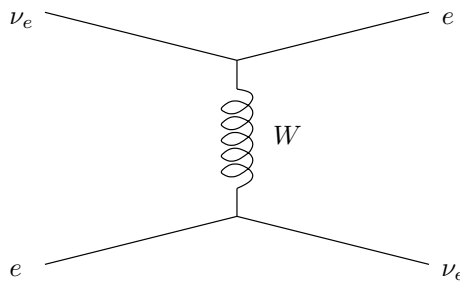
- A naív definíció szerint: a perturbatív megoldásban fellépő divergenciák az elmélet átdefinálásával eltávolíthatók.
- Fizikailag: egy adott Λ levágást alkalmazva, a levágás felett érvényes elmélettől a levágásnál jóval alacsonyabb energiás jósoltok nem függhetnek.

A renormáláshoz technikailag szükséges, hogy a jósolt fizikai hatáskeresztmetszetek nagy energián ne nőjenek. Érvek a renormálhatóság mellett:

1. $G_\beta = G_\mu \cos \Theta_c$ (nem renormálható esetben ez csak véletlen lenne, a korrekciók elmosnák)
2. A renormálhatóság cáfolható jósoltokat ad.

A cél: a gyenge kölcsönhatás áram \times áram-elméletét megpróbáljuk renormálhatóvá tenni.

Ötlet: ha létezik a W^\pm bozon, akkor a $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$ rugalmas szórás az ábrán látható gráffal írható le.



1. ábra. elektron-neutrínó rugalmas szórás W^\pm bozonnal

Ebből kiszámoljuk a relativisztikus differenciális hatáskeresztzetet. $|t| = Q^2$ (átadott impulzus négyzete).

$$\frac{d\sigma}{d|t|} = \frac{G^2}{\pi} \frac{C}{(m_W^2 + |t|)^2}.$$

C -t kitaláljuk $|t| \rightarrow 0$ limeszből (vissza kell adni azt amit előzőleg kaptunk. Ebből az jön ki, hogy $C = m_W^4$. A teljes hatáskeresztmetszet:

$$\sigma_{\text{tot}} \int_0^s \frac{d\sigma}{d|t|} d|t| = \frac{G^2}{\pi} \frac{m_W^4 s}{m_W^2 (m_W^2 + s)} \rightarrow \frac{G^2}{\pi} m_W^2$$

(azaz $s \rightarrow \infty$ esetén konstanshoz tart, ráadásul kis s -ekre a lineáris növekedést is visszaadja).

Ha a 2-fermion-vektorbozon csatolási állandója g :

$$\mathcal{L} = g(\bar{W}_\mu(x)\bar{\nu}_e(x)\gamma^\mu(1 + \gamma_5)e(x) + W_\mu(x)\bar{e}(x)\gamma^\mu(1 + \gamma_5)\nu_e(x)).$$

Innen az jön ki, hogy g dimenziótlan, azaz lehet hogy lehet renormálni!

Elektrodinamikában is ilyen formájú Lagrange van, ott renormálható az elmélet. A különbségek: a vektorbozon itt tömeges, ott nem; itt a V-A nem-megmaradó áramhoz csatolódik, ott a megmaradó elektromos áramhoz csatolódik.

Ha a vektorbozonnak kézzel adunk tömeget, nem lesz renormálható az elmélet, elszálló hurokintegrálok jelennek meg. A megoldás, hogy nem kézzel adjuk meg, hanem feltesszük, hogy spontán szimmetria-sértésből származnak.

2. Spontán szimmetriasértés

Röviden, tömören: az alapállapot nem rendelkezik a dinamika szimmetriájával.

Alapállapot nem-invarianciája: H_0 Hamilton-operátor, $U(g)$ szimmetria ($g \in G$, G csoport), ha $UH_0U^+ = H_0$. Ha $|A\rangle$ lehetséges állapot, akkor $|B\rangle = U|A\rangle$ is lehetséges. Az energia: $E_A = \langle A|H_0|A\rangle = \langle B|H_0|B\rangle = E_B$. Azaz degeneráció van (erről lehet felismerni a szimmetriát).

Tegyük fel, hogy $|A\rangle = \Phi_A 0$, hasonlóan B -re is, ekkor $\Phi_B = U\Phi_A U^+$. Valami ilyesmi is van, hogy $U(g)\Phi_A U^+(g) = R_{AB}(g)\Phi_B$. Vákuum-invariancia: $U0 = 0$. Ha ez nem igaz, akkor nem tudjuk belátni, hogy $E_A = E_B$.

Spontán szimmetriasértés akkor van, ha $U0 \neq 0$, de $E_A = E_B$. Ezért (is) hívhatjuk rejtett szimmetriának.

Generátorok: $U(g) = \exp i\varepsilon_a Q^a$. Hogy $U0 \neq 0$, azt jelenti, hogy létezik olyan Q generátor, hogy $Q0 \neq 0$. Általában $[Q^a, \Phi_j] = it_{jk}^a \Phi_k$, ez a $\Phi_B = U\Phi_A U^+$ infinitezimális változata. Van olyan mező, hogy $\langle 0|\Phi_k|0\rangle \neq 0$. Összeegyeztethető-e az, hogy egy mező vákuumvárható-értéke nem nulla a Lorenz-invarianciával? Skalármező esetén igen!

2.1. Lagrange-függvényes modellek

Ezt messze nem kell ilyen részletesen tudni, csak azért írom ide, hogy látszódjon a formalizmus, meg így talán másik tételhez is felhasználható.

Legyenek $\Phi^i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) önkölcsönható skalármezők. A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^i \partial^\mu \Phi^i - U(\Phi).$$

Itt a kvadratikus (tömeg-) tagok az $U(\phi)$ -ben vannak. 3+1 dimenzióban és renormálható elméletben $U(\Phi)$ legfeljebb negyedfokú. Föltesszük, hogy létezik egy G szimmetriája az elméletnek. Ez azt jelenti, hogy a G csoportnak van egy $N \times N$ -es ábrázolása, Φ^i ennek megfelelően transzformálódik: $\Phi_g^i(x) = D^{ij}(g)\Phi_j(x)$, rövidebb jelöléssel: $\Phi \rightarrow \Phi' = g \cdot \Phi$. Még kell az is, hogy D^{ij} unitér. Föl kell tenni, továbbá: $U(g \cdot \Phi) = U(\Phi)$. Ha ezek mind fennállnak, akkor G ennek a skalárelméletnek a szimmetriája. Továbbá: $D_{ij}(g) = \exp(i\varepsilon^a T_a)_{ij}$, T -k tudják a struktúraállandós dolgokat.

Az energiafunkcionált fel tudjuk írni:

$$E[\Phi^i] = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \Phi^i)^2 + \frac{1}{2} (\partial_j \Phi^i)^2 + U(\Phi) \right].$$

A potenciál alulról korlátos: $U(\Phi) \leq 0$.

Legyen Φ_0 a potenciál nullhelye. Ekkor $E[\Phi_0^i] = 0$, a Φ_0^i klasszikus alapállapot. Ekkor viszont minden $g \in G$ -re $g \cdot \Phi_0^i$ is alapállapot. Feltesszük, hogy az $U(\Phi)$ minden 0-ja ilyen alakú. Legyen

$$M := \{ \Phi_0^i | U(\Phi_0^i) = 0 \} \sim G \cdot \Phi_0^i.$$

Alapállapot szimmetriája: $g \cdot \Phi_0^i = \Phi_0^i$. Azok az elemek, akik a G -ből a kiszemelt alapállapotot invariánsul hagyják, alcsoportot alkotnak:

$$H := \{ g \in G | g \cdot \Phi_0 = \Phi_0 \},$$

ezek a „sértetlen szimmetriák”. $g \cdot H$ mellékosztály elemei Φ_0^i -n ugyanúgy hatnak. Ekkor $M \sim G|_H$.

A szimmetria nem sérül, ha $H = G$, pl. ha $M = \{0\}$. A szimmetria teljesen lesérül, ha $H = \{e\}$. Közbülső eset: a szimmetria spontán sérül, ha H nemtriviális részcsoport.

$(T^a)_{ij}$ bázis, $T^a (a = 1 \dots \dim H)$: H alcsoport generátorai, $T^a (a = \dim H + 1 \dots \dim G)$: G/H generátorai. Azaz $(T^a)_{ij} \Phi_0^j$ nulla első esetben, és nem nulla második esetben. Megjegyzés a multkorhoz:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i - U(\varphi)$$

Itt $U(\varphi) \geq 0$, a G belső szimmetria, ha \mathcal{L} invariáns a $\delta\varphi_i = i\varepsilon^a T_{ij}^a \varphi_j$ transzformációra (T : hermitikus generátor, ezért kell az i).

Noether-tételből a megmaradó áram:

$$J_\mu^a = -iT_{ij}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \varphi_j.$$

2.2. Egy példa

Ebből szemléletes, hogy mi is ez az egész.

Legyen $G = SO(2)$ (gyk. $U(1)$), és $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ valós skalármezők, illetve $U(\varphi) = \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - a^2)^2$ (itt λ és a valós). Ez nyilván invariáns $O(2)$ transzformációra. $U(\varphi)$ kifejtve:

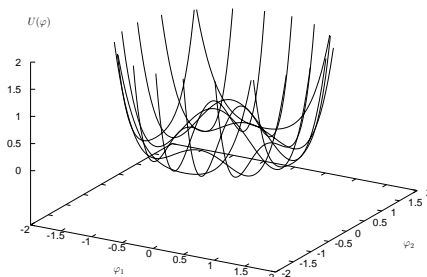
$$U(\varphi) = \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 - 2a^2\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \lambda a^4.$$

Ez nyilván negyedfokú. Ez kell a renormálhatósághoz.

Visszaírva a Lagrange-függvénybe: rossz előjelű lesz a tömegtag (ld. $-2a^2\lambda$)! Ezekerint a szokásos térelméleti alapállapot ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) instabil. A potenciál-nullhelyek halmaza:

$$M = \{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = a^2\} = \mathbb{S}^1.$$

Ha $a^2 > 0$: az M halmaz nem egy pontból áll, azaz lehet spontán szimmetriasértés.



2. ábra. Az $U(\varphi)$ potenciál: mexikói kalap...

Legyen

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Milyen transzformáció hagyja invariánsan ezt a φ_0 -t?

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \varphi_0.$$

Ennek a megoldása: $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$. Azaz a szimmetria teljesen lesérül, $H = \{e\}$.

A következő két eset a Higgs-mechanizmusban jelenik meg:

Ha $G = SU(2)$, $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ dublett ábrázolás, ahol ψ_i -k: komplex mezők. (Két komplex vagy négy valós.) Ha $\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$, akkor ezt csak a $g = e$ hagyja invariánsan, $H = \{e\}$, most is teljesen lesérül a szimmetria.

Ha $G = SU(2)$ (vagy $SO(3)$), $J = 1$ -es spinű triplett ábrázolást nézzük, $H = SO(2)$ lesz ezalapján, a szimmetria nem sérül le teljesen.

3. Goldstone-tétel és a Goldstone-bozon

Az első példán látszott, hogy a kvadratikusan fordított előjelű, azaz $\varphi=0$ instabil. El kell menni a φ_0 körüli kis rezgésekig, ennek a tömegmátrixa határozza meg az új alapállapot körüli spektrumot. Az új alapállapot körüli tömegspektrumban lesznek nulla tömegű részecskék.

Ennek kvantitatív oka: vannak olyan szimmetriák, melyek a különböző alapállapotokat kapcsolnak össze, a megfelelő szabadsági fokok nulla tömegűek lesznek. A tétel: ha egy relativisztikusan invariáns elméletben,

ahol az állapottér metrikája pozitív definit, egy folytonos globális szimmetria spontán sérül, akkor létezik a spektrumban nulla tömegű módus.

Folytonos szimmetria esetén van Noether-áram: $\partial_\mu J^\mu = 0$. Ha $Q(t) := \int d^3x J_0(\vec{x}, t)$, akkor $\dot{Q}(t) = 0$, van megmaradó töltés. Spontán sértés akkor van, ha $|'\rangle := Q|0\rangle \neq 0$. Ekkor viszont baj van, mert a $\langle 0|Q^2|0\rangle = \langle '|\prime\rangle$ nem normálható:

$$\langle 0|Q^2|0\rangle = \int d^3x \langle 0|J_0(0)Q|0\rangle,$$

az integrandus konstans, így az integrál divergálni fog.

Az infinitzimális transzformációt kicsit átalakítva, és közelítve:

$$\varphi - t\varphi' = e^{i\varepsilon^a Q_a} \varphi e^{-i\varepsilon^b Q_b} \approx \varphi + i\varepsilon_a [Q^a, \varphi].$$

Ezzel egy gyengébb, de kezelhetőbb feltételt kapunk a spontáns szimmetriasértésre: Kell olyan φ mező, hogy

$$\langle 0|[Q, \varphi(0)]|0\rangle =: \eta \neq 0.$$

Az árammegmaradás miatt:

$$\frac{d}{dt}[q(t), \varphi(0)] = 0,$$

azaz

$$\frac{d}{dt} \langle 0|[q(t), \varphi(0)]|0\rangle = 0.$$

Beírunk egy teljes rendszert $(|n\rangle \langle n|)$ J_0 és φ közé, ezek impulzus-sajátértékek. Kihaszználjuk a transláció-invarianciát, aztán végül azt kapjuk hogy:

$$\eta = \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(\vec{p}_n) \{ \langle 0|J_0(0)|n\rangle \langle n|\varphi(0)|0\rangle e^{-iE_n t} - \langle 0|\varphi(0)|n\rangle \langle n|J_0(0)|0\rangle e^{iE_n t} \}.$$

Deriválva idő szerint:

$$0 = \sum_n (2\pi)^3 \delta^4(\vec{p}_n) E_n \{ \langle 0|J_0(0)|n\rangle \langle n|\varphi(0)|0\rangle e^{-iE_n t} + \langle 0|\varphi(0)|n\rangle \langle n|J_0(0)|0\rangle e^{iE_n t} \}.$$

Azt kell vizsgálni, hogy ez a két egyenlet egyszerre mikor állhat fel minden t -re. Itt kihasználjuk a pozitív definitiséget. A Dirac-delta miatt létezik olyan $|n\rangle$, melyre ha $\vec{p}_n = 0$ akkor $E_n = 0$. Ez a Goldstone-bozon. Kell viszont, hogy $\langle n|\varphi(0)|0\rangle \neq 0$ illetve $\langle 0|J_0(0)|n\rangle \neq 0$. Innen leolvashatóak a Goldstone-bozonok kvantumszámai.

Az előző példa alapján: $SO(2)$ szimmetria esetén egy generátor van: $T = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A megmaradó áram:

$$J_\mu = -(\partial_\mu \varphi_1)\varphi_2 + (\partial_\mu \varphi_2)\varphi_1 \quad \text{és}$$

$$Q = \int d^3x (\pi_2(x)\varphi_1(x) - \pi_1(x)\varphi_2(x)).$$

A kanonikus csererelációk miatt (cserélgetünk és a deltákat simán kiintegráljuk...):

$$[Q, \varphi_1(0)] = i\varphi_2(0) \quad \text{és} \quad [Q, \varphi_2(0)] = -i\varphi_1(0).$$

Ha $\eta = -i \langle 0|\varphi_2(0)|0\rangle \neq 0$, akkor az előbbi gondolatmenet alapján a Goldstone-bozon a $\varphi_1(0)$ -ban van, azaz $\langle n|\varphi_1(0)|0\rangle \neq 0$.

3.1. A Goldstone-bozon megjelenése a Lagrange-függvényes példákön

Az $SO(2)$ -invariáns Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i - \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - a^2)^2.$$

Legyen $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$, λ helyett a felét írjuk, ekkor

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{\lambda}{2} (2\phi^* \phi - a^2)^2.$$

Alapállapot: $\varphi_1 = a, \varphi_2 = 0, \phi = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Legyen $\eta(x)$ és $\theta(x)$ két valós mező, úgy, hogy

$$\phi = (a + \eta(x)) e^{i\frac{\theta(x)}{a}}.$$

A θ forgatja az alapállapotokat, itt a $\theta(x)$ -nek kell lennie a Goldstone-bozonoknak. Az $\eta(x)$ írja le azt a szabadsági fokot, ami elvisz az alapállapotból. Beírjuk a paraméterezést a Lagrange-ba, a végeredmény:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - 2a^2 \lambda \eta^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \theta)^2 + \left(\frac{\eta}{a} + \frac{\eta^2}{2a^2}\right) (\partial_m u \theta)^2 - \lambda \eta^2 \left(a\eta + \frac{\eta^2}{2}\right).$$

Első három tag kvadratikus, a többi köbös vagy negyedfokú. Az első három adja a tömegeket, a maradék pedig a kölcsönhatást. Nézzük a tömegtagokat. η : $m_\eta = 2a\sqrt{\lambda}$ tömegű valós skalármező; θ : $m_\theta = 0$ tömegű valós skalármező: a fizikus-halandzsa működött, megnyugodhatunk. A θ valóban nulla tömegű, ez a Goldstone-bozon, a többi tag adja az $\eta - \theta$ kölcsönhatást (ez jó bonyolult), illetve az η önkölcsönhatását (utolsó tag).

3.2. Általános eset

Abból indulunk ki, hogy a potenciál invariáns:

$$U(g \cdot \varphi) = U(\varphi).$$

A $g \cdot \varphi$ infinitezimálisan: $\varphi + i\varepsilon^a T^a \varphi$. Az invariancia:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} T_{ij}^a \varphi_j = 0.$$

Differenciáljuk az egyenletet φ_k szerint:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} T_{ij}^a \varphi_j + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} T_{ij}^a = 0.$$

Vegyük ezt φ_0 -ban:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} \right|_{\varphi_0} T_{ij}^a (\varphi_0)_j = 0.$$

A φ_0 körüli oszcillációk tömegmátrixa:

$$M_i^2 k = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_i \partial \varphi_k} \right|_{\varphi_0}.$$

Azaz azt kapjuk, hogy:

$$M_{ki}^2 T_{ij}^a (\varphi_0)_j = 0.$$

Kihhasználjuk, hogy $(T^a)_{ij} (\varphi_0)_j = 0$, ha $a = 1 \dots \dim H$. Ha viszont $a > \dim H$, akkor az előbbi kifejezés nem lesz nulla. Azaz itt állnak előttünk a Goldstone-bozonok! A Goldstone-bozonok:

$$\tilde{\varphi}^a = \varphi_i T_{ij}^a (\varphi_0)_j.$$

4. Higgs mechanizmus

Gond van a nulla tömegű közvetítőkkal: hosszú hatótávolságúak. (a foton és a gravitáció, amit látunk, és ha lenne más, észrevennénk). A spontán szimmetriasértés és a mértékelméletek is 0 tömegű részecskéket adnak, a Higgs mechanizmus szerint ezektől egyszerre meg lehet szabadulni, ki lehet őket transzformálni az elméletből.

A módszer: a Goldstone-bozonok és néhány gauge-bozon összekapcsolódik és tömeges vektorbozonok lesznek.

Az ábeli Higgs-modell: $SO(2)$ -invariáns skalármodell. Egy generátor van, ezért egy $A_\mu(x)$ tér lesz. A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \phi D^\mu \phi - \frac{\lambda}{2} (2\phi^* \phi - a^2)^2.$$

A kovariáns derivált: $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ie A_\mu \phi$. Energiafunkcionál: $E = E[\phi, A_\mu] \geq 0$; állapotban $E = 0$, azaz $\varphi = \varphi_0, A_\mu = 0$. Paraméterezés az alapállapot körül:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + \eta(x)) e^{i\frac{\theta(x)}{a}}.$$

Lokális mértéktrafókat végezhetünk, ez semmi befolyással nem bír a fizikára nézve. Lokális mértéktranszformációval:

$$\phi'(x) = \phi(x) e^{-i\frac{\theta(x)}{a}} = \frac{a + \eta(x)}{\sqrt{2}},$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{ea} \partial_\mu \theta =: B_\mu(x).$$

Az új mezők segítségével a kovariáns derivált:

$$D_\mu \phi = e^{-i\frac{\theta(x)}{a}} D_\mu \phi' = e^{-i\frac{\theta(x)}{a}} \left[\frac{\partial_\mu \eta}{\sqrt{2}} + ie B_\mu \frac{a + \eta(x)}{\sqrt{2}} \right].$$

Azaz a Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(B) F^{\mu\nu}(B) + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{e^2}{2} B_\mu B^\mu (a^2 + 2a\eta + \eta^2) - \frac{\lambda}{2} \eta^2 (2a + \eta)^2.$$

Ebben nincs $\theta(x)$ függés (az tömegtelen tag lenne); a B_μ vektorbozonnak van tömegtagja, méghozzá a tömeg: $m = ea$, ez nem egy szabad paraméter, hanem meghatározódik. Tömeges, valós $\eta(x)$ skalármező megmaradt, $m_\eta = 2a\sqrt{\lambda}$.

Szabadsági fokok előtte: 2 skalár+1 tömegtelen vektorbozon, utána: 1 skalár+1 tömeges vektorbozon. A szabadsági fokok száma (4) megmaradt. Ez alapján szokták azt mondani, hogy a Goldstone-bozonok átlényegültek longitudinális állapotá, az $\eta(x)$ pedig a Higgs-bozon.

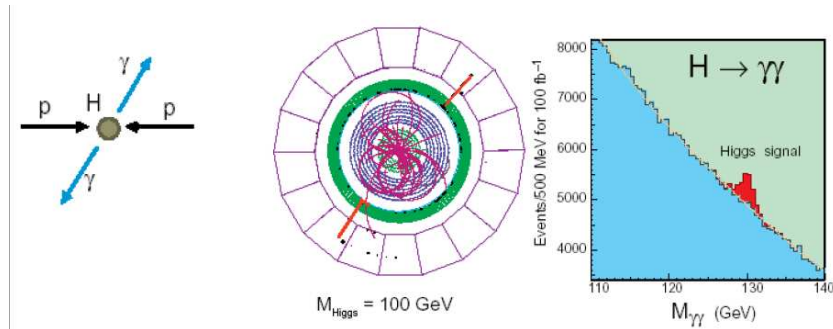
A Higgs-mechanizmust nemábeli mértékelméletre általánosítva az eredmény: 4 db skalármező ($\theta^a(x)$, $\eta(x)$), és 3 db nulla tömegű vektormező: összesen $4 + 3 \times 2 = 10$ szabadsági fok a transzformáció előtt, utána 1 db skalár ($\eta(x)$) és 3 db tömeges vektor, ez is $1 + 3 \times 3 = 10$ szabadsági fok!

4.1. A Higgs-részecskék detektálása

A Standard Modell keretein belül, az 1 TeV-nél kisebb tömegű Higgs bomlásakor több bomlási csatorna is verseng egymással. A lehetőségek a két fotonra a négy töltött leptonra, és a jet-ekre és két leptonra való bomlások. A felbontási adatok a CERN LHC kísérletére vonatkoznak.

4.2. A Higgs bomlása két fotonra

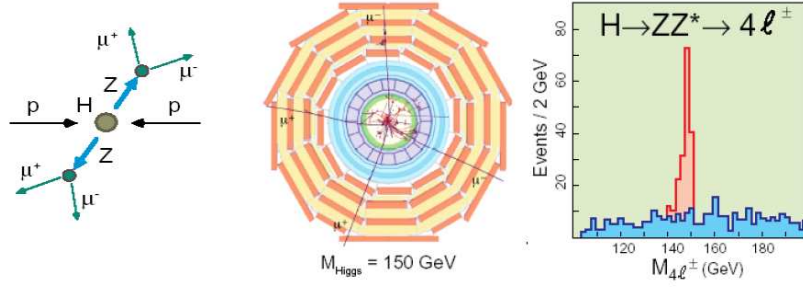
Az esemény akkor történik meg, ha az $M_{Higgs} < 140 GeV$ felttel teljesül. Az így keletkező kb. 100 GeV energiájú fotonokat jobb mint 1 %-os feloldással érzékeli az elektromágneses kaloriméter. A 3. ábrán egy 130 GeV energia körüli szimulált Higgs-bozon csúcsa is látható.



3. ábra. Egy lehetséges gammákra való bomlási esemény szimulált megjelenése a detektorban és a spektrumban.

4.3. A Higgs bomlása négy leptonra

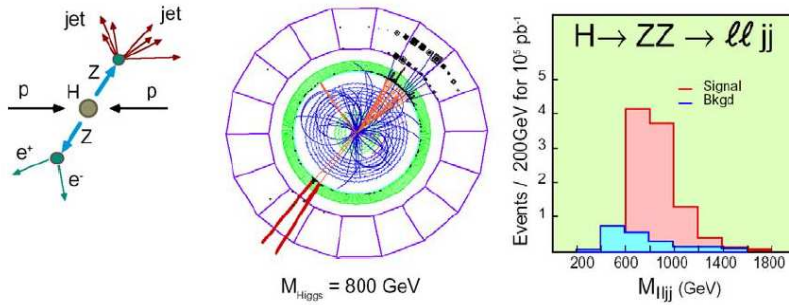
A Higgs-bozon jelenlétének egyik jele, hogy elbomlik egy Z - Z vagy Z - Z^* gyenge bozon párra, amelyek négy darab elektromosan töltött leptonra bomlanak tovább. Ha ez a négy lepton mind müon, akkor érhető el a legjobb detektálási hatásfok. A négy leptonos bomlási csatorna a körülbelül a $130 GeV < M_{Higgs} < 750 GeV$ tartományban vezethet a Higgs-bozon megtalálásához. Ebben a tartományban a $pp \rightarrow H_0 \rightarrow ZZ^* \rightarrow 2l^+2l^-$ bomlási módok állnak fent. A 170 GeV-nél kisebb energiatarományban a tömegre (energiára) $\Delta E = 1 GeV$ finomságú feloldás érhető el. Az ábrán a spektrumbeli csúcs látható.



4. ábra. Egy lehetséges négy leptonos bomlási esemény szimulált megjelenése a detektorban és a spektrumban.

4.4. A Higgs bomlása két leptonra és két jetre

A legnagyobb energiájú tartományban a Higgs legvalószínűbb bomlási csatornáit a vagy folyamatok amelyek akkor jönnek létre, ha a tömegre teljesül az $M_{Higgs} > 500 GeV$ feltétel. A detektálás ebben az esetben a leptonok, a jet-ek, és a hiányzó transzverzális energia mérésén alapul.



5. ábra. A két lepton és két jet típusú bomlás megjelenése a detektorban és a kaloriméterekben.

5. A Salam-Weinberg modell bozonikus szektora, a W, Z bozonok

A SW modell egy spontán sértett $SU(2) \times U(1)$ mértékelmélet, amely a gyenge és az elektromágneses kölcsönhatást egyesíti.

A modellünk olyan hipotetikus világ, melyben a fermionok: elektron, pozitron, elektron-neutrínók. Ezek a G szimmetriacsoport ábrázolásai matematikailag. Fizikailag: van elektromágneses és a gyenge kölcsönhatás:

$$\mathcal{L}_{em} = -e j_\mu^{em} A^\mu$$

$$\mathcal{L}_{gyenge} = g(J_\mu W^{\mu+} + \bar{J}_\mu W^\mu).$$

Itt $j_\mu^{em} = -\bar{e}\gamma_\mu e$ és $J_\mu = \bar{\nu}_e O_\mu e = \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e$.

Legalább három vektorbozon kell: $A_\mu, W^\mu, W^{+\mu}$. Gauge-elv: globális szimmetriát lokálissá tesszük. Emiatt azok az áramok, melyhez a vektorbozonok csatolódnak a globális szimmetria megmaradó áramai. Ezek megmaradnak. 3 darab. Töltéseket kell definiálni: nullkomponens térintegrálja:

$$T_+(t) = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} J_0(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int d^3x \nu_e^+ (1 + \gamma_5) e,$$

$$T_-(t) = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \bar{J}_0(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int d^3x \nu_e^+ (1 + \gamma_5) e = T_+(t)^+,$$

$$Q(t) = - \int d^3\vec{x} e^+ e.$$

Ezek a megmaradó töltések, ezek feszítik ki a globális szimmetria Lie-algebráját. Ez a legtermészetesebb elképzelés. Mindegyiknek közvetlen fizikai jelentése van.

Fermionokra az egyidős antikommutátor:

$$\{\psi_i^+(\vec{x}, t), \psi_j(\vec{y}, t)\} = \delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$

Ezt használva az egyidős $[T_+, T_-]$ kommutátort ki tudjuk számolni:

$$[T_+(t), T_-(t)] := 2T_3(t) = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} (\vec{x} \nu_e^+ (1 + \gamma_5) \nu_e - e^+ (1 + \gamma_5) e).$$

Ennek abszolút semmi köze Q -hoz. Találtunk egy negyedig generátort, ezért nem lehet simán $SU(2)$.

Megmutatható, hogy a T_+, T_-, T_3 $SU(2)$ -algebrát alkotnak, a minimális választás: $G = SU(2) \times U(1)$. Itt $U(1)$ a Q -nak és a T_3 -nak a kombinációjának választjuk.

$$Q - T_3 = \int d^3 \vec{x} \left[-\frac{1}{2} (\nu_{eL}^+ \nu_{eL} + e^+ L_{eL}) - e_R^+ e_R \right].$$

Ez az $U(1)$ a gyenge hipertöltés, jelölése: Y . Konvenció:

$$Y := 2(Q - T_3).$$

Átrendezve ismerős varázsképlet: $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$!

SW modell: spontán szimmetriasértés. $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Gyenge izospin és gyenge hipertöltés. Ezt kellene lesérteni $U(1)_{em}$ -re. Kellenek skalármezők, ábrázolásban, úgy hogy jó legyen. 4 nulla tömegű vektorbozonból csinálunk 1 nulla tömegűt és 3 tömegeset.

A skalármezőt (Φ) az $U(1)$ -hez is kell csatolni, hiszen a varázsképlet miatt az elektromos töltés tartalmaz T_3 -at és Y -t is. Az $SU(2)$ szerint dublett, de az $U(1)_Y$ -hoz is csatolni kell. Az ő Y -töltése nem lehet 0. Valamelyiknek nem nulla vákuumvárhatóértéke kell, hogy legyen. A töltés invariánsan hagyja a vákuumot, azaz a $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ közül az egyik semleges lehessen. Konvenció: $Y[\Phi] = 1$. Választás: $\Phi_1 = \Phi^+$ (pozitív töltés), $\Phi_2 = \Phi^0$ (ez semleges).

Minden megvan, ami a bozonikus szektorhoz kell. Innen nagy csúnya számolás, az eredménye:

- Egy tömeges semleges skalár tag, a Higgs.
- Két hipertöltés nélküli, töltött vektorbozon: W^\pm .
- Egy tömweges töltetlen vektorbozon: Z .
- Egy tömegtelen, töltetle: foton.
- Jóslat $W - Z$ tömegarányára:

$$\frac{M_W^2}{M_Z^2} = \cos^2 \Theta_W.$$

, ahol Θ_W a Weinberg-szög, avagy gyenge keverési szög.

5.1. Fermionikus szektor

„Egy család közelítés”, e, ν_e, u, d , többi részecske beépítése csak később. Alapdolog, észrevétel: az alapvető szabadsági fokok a gyenge kölcsönhatásban: balkezes részecskék és a jobbkezes antirészecskék (azaz balkezes mezők). A bal és jobbkezes mezők különböző ábrázolásokba kerülhetnek.

5.1.1. Egy-család közelítés

Család: ν_e, e, u, d . A gyenge kölcsönhatásban a bal illetve jobbkezes részecskék másféleképpen viselkednek. Emiatt a bal és jobbkezes mezők más-más ábrázolásban lehetnek:

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi.$$

Itt: $\psi = \nu_{eL}, e_L, e_R, u_L, u_R, d_L, d_R$, összesen 15 mező a színek miatt. Nincs jobbkezes elektron-neutrínó, a nulla-tömeg be van táplálva a Salam-Weinberg modellbe!

Meg kell határoznunk a részecskék $SU(2) \times U(1)$ -kvantumszámait. Ehhez már felírtuk:

$$T_+(t) = \int (\nu_{eL}^+ e_L + u_L^+ d_L) d^3x,$$

és mivel

$$T_-(t) = T_+(t)^+$$

valamint $2T_3(t) = [T_+(t), T_-(t)]$, így

$$T_3(t) = \frac{1}{2} \int d^3x (\nu_{eL}^+ \nu_{eL} - e_L^+ e_L + u_L^+ u_L - d_L^+ d_L).$$

Ezek az operátorok egy $SU(2)$ -algebrát alkotnak, ezért az elektront és a neutrínót, valamint az u_L és d_L kvarkokat egy $SU(2)$ -dublettbe kell rakni.

A jobb meg a balkezes komponensek más-más ábrázolásba tartoznak:

$$\ell_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

Ez $SU(2)$ -dublett. Az u_R, d_R, e_R $SU(2)$ szinglettént ábrázolódik, nem vesz részt a gyenge kölcsönhatásban.

Az elektromágneses töltés operátora is kell, hogy szerepeljen a generátorok között (elektrogyenge egyesítés):

$$Q = \int d^3x (-e_L^+ e_L - e_R^+ e_R + \frac{2}{3} u_L^+ u_L + \frac{2}{3} u_R^+ u_R - \frac{1}{3} d_L^+ d_L - \frac{1}{3} d_R^+ d_R),$$

$$Q - T_3 = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} (\nu_{eL}^+ \nu_{eL} + e_L^+ e_L) + \frac{1}{6} (u_L^+ u_L + d_L^+ d_L) - e_R^+ e_R + \frac{2}{3} u_R^+ u_R - \frac{1}{3} d_R^+ d_R \right\}.$$

Gyenge hipertöltés konvencióval rögzített: $Y = 2(Q - T_3)$, ez a megszokás. A különböző multiplettek hipertöltései:

$$Y(\ell_L) = -1, Y(q_L) = \frac{1}{3}, Y(e_R) = -2, Y(u_R) = \frac{4}{3}, Y(d_R) = -\frac{2}{3}.$$

Szabály: az Y a multiplett átlagtöltésének a kétszerese!

Ezzel az összes mezőnek megmondtuk az $SU(2) \times U(1)$ kvantumszámait.

$$\mathcal{L}_{\psi A} : \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi$$

Itt $D_\mu \psi$ függ az ábrázolástól:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ig \vec{T} \vec{A}_\mu \psi - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \psi$$

Az elektronokra nincsenek T -k:

$$D_\mu e_R = \partial_\mu e_R + ig' B_\mu e_R,$$

a dublettekben Pauli-mátrixok vannak:

$$D_\mu \ell_L = \partial_\mu \ell_L - ig \frac{\vec{T}}{2} \vec{A}_\mu \ell_L + ig' \frac{1}{2} B_\mu \ell_L.$$

Van $\bar{\psi} \psi$ típusú tagok is a \mathcal{L} -ba: fermionikus tömegtagok. Ez egy balkezes és egy jobbkezes mezőket kapcsol össze: $\mu \bar{\psi}_L \psi_R$. Nincs $SU(2) \times U(1)$ invariáns tömegtag! Az egész \mathcal{L} $SU(2) \times U(1)$ invariáns, csak az alapállapot sérti. Az elektronok tömege sem lesz szabad paraméter, az generálódik. Emiatt kisebb a modellbe írt önkény. *van így is elég...*

Fermion-mezők és skalármezők kölcsönhatása – Yukawa-csatolások: $\mathcal{L}_{\psi\phi}$, általános alak: $f \bar{\psi}_L \psi_R \phi$, itt f dimenziótlan: naívan akár renormálható is lenne!

Lehetséges tagok: $\bar{\ell}_L \phi$ ez $SU(2)$ -invariáns szinglett, ehhez szinglettet hozzátehetünk, úgy hogy a gyenge hipertöltésre is invariáns legyen. És van ilyen, aminek $Y = -2$ és szinglett: az e_R . Azaz lesz $f_e \bar{\ell}_L \phi e_R$ alakú tag. Még lehetséges: $f_d \bar{q}_L \phi d_R$ alakú tag is: ez is invariáns a gyenge hipertöltésre, valamint $SU(2)$ -szinglett.

Márcsak az u_R -t kell betenni valahova. Legyen $\tilde{\psi} := i\tau_2 \psi^*$. A konjugálás miatt $Y(\tilde{\psi}) = -1$. Ezzel együtt már lehet még egy invariánst csinálni: $f_u \bar{q}_L \tilde{\psi} u_R$. E három tag a Yukawa csatolást:

$$\mathcal{L}_{\psi\phi} = f \bar{\psi}_K \psi_R \phi + f_e \bar{\ell}_L \psi e_R + f_d \bar{q}_L \phi d_R + f_u \bar{q}_L \tilde{\psi} u_R + c.c..$$

A spontán szimmetriasértés unitér mértékben:

$$\phi = \frac{\eta(x) + v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{\phi} = \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Így:

$$\mathcal{L}_{\psi\phi} = \frac{v}{\sqrt{2}}(f_e \bar{e}_L e_R + f_u u_L u_R + f_d \bar{d}_L d_R) + \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}}(f_e \bar{e}_L e_R + f_u u_L u_R + f_d \bar{d}_L d_R).$$

Az első tag az elektron és a kvarkok tömegtagjai, a második a Higgs-skalár kölcsönhatása az elektronokkal és a kvarkokkal.

$$m^{(i)} = \frac{v}{\sqrt{2}} f^{(i)},$$

azaz a modell paramétereit megadják a tömegeket. Fordítva:

$$f^{(i)} = \frac{\sqrt{2} m^{(i)}}{v}.$$

Az m fizikailag ismert, ha v nagy: a Higgs-skalár nehezen fog kölcsönhatni. Ez lesz majd tényleg. Azaz $f^{(i)}$ kicsi. Természetesen ν_e -nek nincs tömegtagja.

A gyenge és elektromágneses kölcsönhatás és áramok:

$$\bar{\ell}_L \gamma^\mu \left(\frac{g}{2} \vec{\tau} \vec{A}_\mu - \frac{g'}{2} B_\mu \right) \ell_L + \bar{q}_L \gamma^\mu \left(\frac{g}{2} \vec{\tau} \vec{A}_\mu + \frac{g'}{6} B_\mu \right) q_L + \bar{u}_R \gamma^\mu \frac{2}{3} g' B_\mu u_R - g' \bar{e}_R \gamma^\mu B_\mu e_R - \frac{g'}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu B_\mu d_R.$$

Ezt szeretnénk

$$g(J_\mu^1 A^{1\mu} + J_\mu^2 A^{2\mu} + (gJ_\mu^3 A^{3\mu} + \frac{1}{2} g' J_\mu^Y B^\mu))$$

alakba írni. első tag a töltött áram (\mathcal{L}_{cc}) kölcsönhatás, a másik tag a semleges áram (\mathcal{L}_{nc}) kölcsönhatás.

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \pm i A_\mu^2).$$

Innen:

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} (J_\mu^- W^{\mu+} + J_\mu^+ W^{\mu-}),$$

ahol $J_\mu^\pm = J_\mu^1 \mp i J_\mu^2$ és $J_\mu^+ = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e + \frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) d$. Ez a $V - A$ gyenge töltött áram 1/2-szerese. Ez lehetőséget ad arra, hogy az alacsonyenergiás paraméterekkel kifejezzük ezeket a mennyiségeket. Alacsony energián a W -propagátor megszűnik és négyfermion-kölcsönhatásba megy át. Azaz

$$\mathcal{L}_{cc}^{eff} = \frac{g^2}{2M_W^2} J_\mu^+ J^{\mu-}.$$

Összehasonlítva a Fermi-féle Lagrange-függvénnyel:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{2M_W^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{g^2}{8 \frac{g^2 v^2}{4}} = \frac{1}{2v^2}.$$

Azaz a vákuumvárható-érték a Fermi-féle csatolási állandóval van kapcsolatban:

$$v = 2^{-1/4} G_F^{-1/2} \approx 250 \text{ GeV}.$$

Erre az előző pár sorra valszeg nagyon kíváncsiak.

A különböző kölcsönhatások:

$$\mathcal{L}_{nc} = g \sin \Theta_W J_\mu^{em} A^\mu + \frac{g}{\cos \Theta_W} J_\mu^Z Z^\mu,$$

ahol $J_\mu^Z = J_\mu^3 - \sin^2 \Theta_W J_\mu^{em}$. Viszont a $J_\mu^{em} A^\mu$ együtthatója a finomszerkezeti állandó: $e = g \sin \Theta_W$. Kapcsolatot kaptunk tehát az elektromos töltés és a gyenge $SU(2)$ csatolási állandó között, valamint a gyenge semleges áram csatolási állandóit is leolvashatjuk:

$$J_\mu^Z = \sum_i \left(g_L^i \bar{\psi}_L^i \gamma_\mu \psi_L^i + g_R^i \bar{\psi}_R^i \gamma_\mu \psi_R^i \right),$$

ahol $g_{L,R}^i = T_3(\psi_{L,R}^i) - Q(\psi) \sin^2 \Theta_W$.

Ezek alapján: $g_L^{\nu_e} = 1/2$, $g_R^{\nu_e} = 0$, $g_L^e = -\frac{1}{2} + \sin^2 \Theta_W$ valamint $G_R^e = +\sin^2 \Theta_W$.

A Z -cserével járó folyamatok eszerint ugyanolyan erősek, mint a töltött áram-kölcsönhatások. Alacsony energián:

$$\mathcal{L}_{nc}^{eff} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g^2}{\cos^2 \Theta_W M_Z^2} \cdot J_\mu^Z J^{\mu Z}.$$

Felhasználva, hogy $\cos^2 \Theta_W M_Z^2 = M_W^2$: Az együttható ugyakkora mint a töltött áramé. Ezt a 70-es évek elején kísérletileg is megállapították.

A gyenge keverési szög mérése: Az első mérés a $\nu_e e$ rugalmas szórás alapján történt. A folyamat két ágon mehet, egyszer egy W bozont cserél ki (és felcserélődik a két lepton), vagy Z -bozont cserél ki. A kettő amplitúdó összeadódik.

$$M(\nu_e e \rightarrow \nu_e e) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_e] \cdot [\bar{e} \gamma_\mu (a + b \gamma_5) e],$$

ahol $a = 2 \sin^2 \Theta_W + \frac{1}{2}$ és $b = \frac{1}{2}$. Régi csak $V - A$ -s akármivel $a = b = 1$ lenne. A kísérleti érték (mai):

$$\sin^2 \Theta_{W \text{ exp}} = 0,22 - 0,23.$$

Innen a W és Z bozon tömege:

$$M_W = \frac{37 \text{ GeV}}{\sin \Theta_W} = 81,8 \text{ GeV},$$

$$M_Z = 92,6 \text{ GeV}.$$

Kísérletileg: sikerült felfedezni a W^{\pm} -t és Z -t, a gyenge pont az $\eta(x)$ Higgs-skalár, ezt még nem fedezték fel. Legerősebben a top-kvarkhoz csatolódik! $m_\eta = \sqrt{2}\mu$, ez szabad paraméter.

És hogy milyen jó az egész SW modell:

Az egycsalád-közelítés paraméterei: $g, g', \mu^2, \lambda, f_e, f_d, f_u$. A fizikai paraméterek: $e, \sin \Theta_W, M_W, m_\eta, m_e, m_u, m_d$. Tehát 7 paraméter, 7 jóslat...

A teljes Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{bozonikus}} + \mathcal{L}_{\psi A} + \mathcal{L}_{\psi \phi} + 0.$$

A 0: nincs tömegtag! A kvantumszámok rögzítése után ez a legáltalánosabb $SU(2) \times U(1)$ és Lorentz-invariáns, naivan renormálható alak. Ez azért fontos, mert ha ezen az \mathcal{L} -on találunk globális szimmetriát, az a kvantumszámok kiosztásának következményei. Ilyenek a barionszám- és a leptonszám-megmaradás.

5.2. Többcsalád-közelítés, a lepton-, és kvark multiplettek

A többi család – ν_μ, μ, c, s illetve ν_τ, τ, t, b – beépítése, családonként 15 mező. Első közelítés: ismétlés – ugyanabba az ábrázolásba vannak ezek, mint az elektron-család:

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L.$$

A vesszős kvarok kevertek, a határozott tömegű kvarkok lineárkombinációi.

Az alap-felismerések:

- ha egynél több család van: „mértéksajátállapot” (határozott $SU(2) \times U(1)$ transzformációs tulajdonság) illetve „tömegsajátállapot” nem feltétlenül esik egybe;
- fermiontömegek: spontán szimmetriasértés során keletkeznek.
- nem mértünk lepton-keveredést, a modell szerint a neutrínók tömege okozna keveredést.