

18. Tétel: Az áramalgebra elemei: CVC, PCAC, Cabibbo-elmélet, GIM-mechanizmus

2004. június 21.

1. A megmaradó vektoráram (CVC) hipotézis

Alapötlet: a ritkaságörző szemileptonos folyamatokban a hadronáram vektorrésze: $\bar{u}\gamma_\alpha d$ illetve $\bar{d}\gamma_\alpha u$. Ez csak a vektorrész, az axiálrészre nincs ilyen feltételezés.

Kapcsolatba hozzuk $\bar{u}\gamma_\alpha u - \bar{d}\gamma_\alpha d$ árammal, ez egy semleges áram! Ez a hadronok elektromágneses áramának az izovektor-része. Ha $m_u = m_d$, akkor QCD-ből globális $SU(2)$ szimmetria: *izospin*.

Izospin szempontjából: $u - d$: dublettként transzformálódik (definiáló ábrázolást feszíti ki):

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = q.$$

Ekkor: $\bar{u}\gamma_\alpha d = \bar{q}\gamma_\alpha \tau^+ q$, $\bar{d}\gamma_\alpha u = \bar{q}\gamma_\alpha \tau^- q$, $\bar{u}\gamma_\alpha u - \bar{d}\gamma_\alpha d = \bar{q}\gamma_\alpha \tau_3 q$. Itt:

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pontos normálás esetén még kell egy $1/\sqrt{2}$ faktor a τ^\pm -hez és egy $1/2$ a τ_3 -hoz.

Az u, d kvarkokból álló hadronok elektromágneses kölcsönhatása:

$$eA_\alpha J^\alpha = eA_\alpha \left(\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\alpha - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\alpha d \right) = eA_\alpha \left(\frac{1}{2}\bar{q}\gamma^\alpha \tau_3 q + \frac{1}{6}\bar{q}\gamma^\alpha q \right).$$

Az első komponens: izovektor, a második izoskalár. Az összes egyéb kvark izoskalár, csak az u és d hordoz izospint!

A QCD globális szimmetriája szempontjából:

$$I_\alpha^0 := \frac{1}{2}\bar{q}\gamma_\alpha \tau_3 q,$$

$$I_\alpha^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{q}\gamma_\alpha \tau^+ q,$$

$$I_\alpha^- := \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{q}\gamma_\alpha \tau^- q.$$

egy izovektor operátor három komponense.

Van globális izospin-szimmetria, a Noether-tétel szerint ehhez tartozik megmaradó Noether-áram. Ezek nem mások mint I_α^a -k. Megmaradás nem más mint:

$$\partial^\alpha I_\alpha^a = 0.$$

A megmaradó áramok segítségével megmaradó töltések:

$$Q^a = \int_{x_0 = \text{állandó}} d^3x I_0^a.$$

Ezek generálják a szimmetriát:

$$e^{i\alpha^a Q_a} \Phi e^{-i\alpha^a Q_a} = T(\alpha_a)\Phi,$$

infinitesimalisan:

$$\alpha^a [Q_a, \Phi] = \delta_{\alpha_a} \Phi$$

(α^a : trafó paraméterei).

Izospin-szimmetria következményei:

- $\partial^\alpha I_\alpha^a = 0$,
- I_α^a hadronok közötti mátrixelemeit a Wigner-Eckart tétel összekapcsolja: gyenge és EM form-faktorok összekapcsolása.

Ezt $\bar{u}\gamma_\alpha d$ -ra felírva egy fontos következményhez jutunk:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\alpha \langle f | \bar{u}(x)\gamma_\alpha d(x) | i \rangle = \partial^\alpha e^{i(p_f - p_i)x} \langle f | \bar{u}\gamma_\alpha d(0) | i \rangle = \\ &= iq^\alpha V_\alpha e^{i(p_f - p_i)x} \end{aligned}$$

Ez minden x -re igaz, azaz:

$$q^\alpha V_\alpha = 0.$$

Azaz az áramok mátrixeleme transzverzális.

2. A részlegesen megmaradó axiáláram (PCAC) hipotézis

2.1. QCD globális szimmetriái

A QCD Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \sum_{k=1} n_f \bar{q}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m_k) q_k.$$

Itt

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu],$$

$$A_\mu = A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2},$$

$$D_\mu q_k = \partial_\mu q_k - ig A_\mu q_k.$$

A k : ízek: $k = u, d, s, c, b, t$, $n_f = 6$. Az effektív íz-szám: $F = 2$ (csak u és d), 3 (u, d, s) esetleg 4 (u, d, s, c). m_k : k . ízű kvark tömege.

Legyen $F = 2, 3$ úgy, hogy minden kvarktömeg 0. Kétfajta globális invariancia. $(T_a)_{f,f'}$, ahol $f, f' = 1 \dots F$ és $a = 1 \dots F^2$. Megtranszformáljuk:

$$\delta q_f = i\delta\omega_V^a (T_a)_{ff'} q_{f'},$$

illetve

$$\delta q_f = i\delta\omega_A^a (T_a)_{ff'} \gamma_5 q_{f'}.$$

Állítás: ezek globális invarianciák: $\delta\mathcal{L}_{\text{QCD}} = 0$. Ehhez tartoznak Noether-áramok. T_a : $U(F)$ generátorai. A Noether-áramok:

$$J_\mu^a = \bar{q}_f \gamma_\mu (T^a)_{ff'} q_{f'} \quad \text{és}$$

$$J_\mu^{5a} = \bar{q}_f \gamma_\mu \gamma_5 (T^a)_{ff'} q_{f'}.$$

Ezek vektor- illetve axiálvektorok. Azaz $\partial^\mu J_\mu^a = 0$ és $\partial^\mu J_\mu^{5a} = 0$ a Noether-tételből.

Nulla kvarktömegek esetén mindkettő megmarad.

Ha a kvarktömegek nem nullák:

$$\partial^\mu J_\mu^a = \sum_{ff'} \bar{q}_f (m_f - m_{f'}) (T_a)_{ff'} q_{f'} \quad \text{és}$$

$$\partial^\mu J_\mu^{5a} = \sum_{ff'} \bar{q}_f (m_f + m_{f'}) (T_a)_{ff'} \gamma_5 q_{f'}.$$

Ha minden kvarktömeg ugyanakkora, akkor a vektoráram megmarad, de az axiáláram nem!

$F = 2$ -nél pionok keletkeznek a spontán szimmetriasértés miatt. (Ha a kvarktömegek nem nullák, azok is sértik az axiálszimmetriát, ez tömeget generál a pionoknak, amik enélkül tömegtelen Goldstone-bozonok lennének.)

$F = 2$ esetben $\bar{u}\gamma_\alpha d$ vektoráram: $\bar{q}\gamma_\alpha\tau^\alpha q$ izovektor. Ekkor ennek a divergenciája 0. $m_u = m_d$, az axiáláram: $\bar{u}\gamma_\alpha\gamma_5 d$, másik terminusban felírva: $\bar{q}\gamma_\alpha\gamma_5\tau^a q$. Az eredmény:

$$\partial^\alpha J_\alpha^{5a} = (m_u + m_d)\bar{q}\gamma_5\tau^a q.$$

Tudjuk, hogy $m_u + m_d \sim m_\pi^2$. Az arányossági tényezőt a pionbomlási számításokat felhasználva kapjuk. A végeredmény:

$$\partial^\mu J_\mu^{5a} = f_\pi m_\pi^2 \Phi_\pi^a.$$

Ez a PCAC: nem marad meg az axiáláram, a divergenciája a piontérrel arányos.

Ebből vezetik le a Goldberger-Trieman – relációt, amely a neutron β -bomlásának egyik paraméterét jósolja, $g_1 \approx 1.3$, ami tökéletesen egyezik a mért értékkel.

3. A GIM-mechanizmus

A semleges kaonok tömegkülönbségét a gyenge kölcsönhatás magasabb rendben sem tudja megmagyarázni, és a $|\Delta S| = 2$ folyamatokra túl nagy effektív csatolási állandót jósol. A következőkben ennek az ellentmondásnak a feloldására mutatunk egy lehetséges utat: egy új kvark bevezetésével magasabb energián néhány gráf kiejti egymás járulékát.

A kiút: GIM-mechanizmus (Glashow, Iliopoulos, Maiani). Az u , d és s kvarkon kívül még van kvark, legyen ez a c . Ennek $2/3$ a töltése. A töltött hadronáram szerkezete:

$$J_h^\alpha = \bar{u}\gamma^\alpha(1 + \gamma_5)d' + \bar{c}\gamma^\alpha(1 + \gamma_5)s'.$$

Itt $d' = d \cos \Theta + s \sin \Theta$ és $s' = -d \sin \Theta + s \cos \Theta$.

$q^2 \gg m_c^2$ esetén a gráfok egzaktnak kiejtik egymást, nullától különböző járulék a kis impulzusú tartományból jön. Innen azt kapták, hogy

$$G_2 = \frac{G_F^2}{16\pi^2} (m_c - m_u)^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta,$$

itt gyk. az m_u elhanyagolható. Innen megjósolható az m_c , illetve meghatározható a

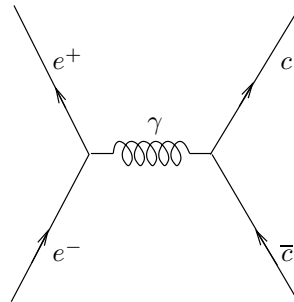
$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{4m_c^2 \cos^2 \Theta}{3\pi m_\mu^2} \Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_{\mu u})$$

összefüggésből is. Az eredmény:

$$m_c \approx 1,5 \text{ GeV}.$$

A charmed-részecskés dolgok nem teljesen ide tartoznak, de lehet, hogy ilyet kérdeznek közben.

3.1. A J/Ψ részecske



1. ábra. A J/Ψ részecske keletkezése elektron-pozitron-szét sugárzásban

A QCD elmélete a kezdeti korszakát az 1970-es évek elején élte. Ekkor fedezték fel a J/Ψ részecskét két különböző helyen, két különböző folyamatban: egyrészt az elektron-pozitron hadronokba való szét sugárzásában, majd ugyanakkora energián találtak egy rezonanciát a

$$pp \rightarrow e^+ e^- X$$

folyamatban az elektron-positron-pár invariáns tömegeloszlásában. A rezonancia helyéből

$$m_{J/\Psi} 3,096 \text{ GeV},$$

és a rezonancia szélessége

$$\Gamma_{J/\Psi} = 63 \text{ keV}$$

volt, ami ekkora tömeg mellett hihetetlenül éles rezonanciát (hosszú élettartamot) jelent (1,5 GeV lenne egy várható rezonanciaszélesség ekkora energián). Ez hamar tisztázódott: a J/Ψ részecske $\bar{c}c$ kötött állapot, spinje egyes, paritása negatív, a keletkezési gráfjának megfelelően (ld. az 1. ábrát).

Meg kell magyaráznunk, hogy miért ilyen kicsi a rezonancia szélessége. Ennek az az oka, hogy csak három gluonon keresztül képes elbomlani, mert az egygluonos bomlás nem lehetséges, hiszen a $\bar{c}c$ fizikai állapot, és mint ilyen color-szinglet, és egy gluon nem lehet color-szinglet csatorna. Hasonlóan a kétgluonos bomlás sem lehetséges, mert a kétgluon-állapot paritása különbözik az egyfoton-állapot paritásától (és azt tudjuk, hogy egyfotonos bomlás van). Emiatt

$$\Gamma_{J/\Psi} \sim \alpha_{QCD}^3(m_{J/\Psi}),$$

ahol α_{QCD} a kvantumszindinamika (futó) csatolási állandója. Ez megmagyarázza a rezonancia keskenységét: $m_p \ll m_{J/\Psi}$, így α_{QCD} jóval kisebb, mint a protonenergián mért csatolási állandó (aszimptotikus szabadság).

3.2. Charmed részecskék

A c vagy \bar{c} kvarkokat tartalmazó részecskéket charmed részecskéknek nevezzük. Ezek közül a legalacsonyabb energiájú nulla spinű negatív paritású részecskék a következők:

| | | Tömeg | Élettartam |
|-------|--------------|----------|--------------------------------|
| D^+ | $(c\bar{d})$ | 1869 MeV | $8 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ |
| D^0 | $(c\bar{u})$ | 1864 MeV | $3,6 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ |
| F^+ | $(c\bar{s})$ | 1971 MeV | $2,8 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ |

Ezen tömegértékek ismeretében fenomenológiai magyarázatot is tudunk adni a J/Ψ kis szélességére (hosszú élettartamára): a $J/\Psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0$ bomláshoz a $\bar{c}c$ tömege a küszöb alatt van:

$$m_{\bar{c}c} < 2m_{\text{legkisebb charmed}},$$

így ez a bomlás kinematikailag tiltott.

3.3. Charmed részecskék bomlása

A charmed részecskék bomlásait a GIM-mechanizmus által megjósolt J_λ^h szerkezettel továbbra is a $J^\lambda J_\lambda$ áram \times áram-Lagrange-függvényből számoljuk. Az ebben a szakaszban tárgyalt bomlások leírásához szükséges tagok a Lorentz-struktúra (gamma-mátrixok) kiírása nélkül:

$$(\bar{s}c \cos \theta - \bar{d}c \sin \theta)(\bar{\nu}_e e + \bar{\nu}_\mu \mu + \bar{u}d \cos \theta \bar{u}s \sin \theta + \text{h.c.}). \quad (1)$$

A továbbiakban megvizsgálunk néhány, ezen tagok által leírt bomlást. Az alábbi táblázatban láthatjuk a lehetséges szemileptonos bomlásokat:

| Kvarkfolyamat | relatív erősség | kiválasztási szabály | Példák |
|---------------------------------|-----------------|-----------------------|--|
| $c \rightarrow s\ell^+\nu_\ell$ | $\cos^2 \theta$ | $\Delta S = \Delta C$ | $D \rightarrow \ell^+\nu_\ell \bar{K}, F \rightarrow \ell^+\nu_\ell$ |
| $c \rightarrow d\ell^+\nu_\ell$ | $\sin^2 \theta$ | $\Delta S = 0$ | $D \rightarrow \ell^+\nu_\ell, F \rightarrow \ell^+\nu_\ell K$ |

(Az F bomlásai közül az első a domináns.) Vegyük észre, hogy a charmed részek egyik (detektálásuk szempontjából fontos) tulajdonsága, hogy a bomlásuk során sok ritka részecske keletkezik.

Nemleptonos bomlások:

| Kvarkfolyamat | relatív erősség | kiválasztási szabály | Példák |
|---------------------------|-------------------------------|------------------------|---|
| $c \rightarrow s\bar{u}d$ | $\cos^4 \theta$ | $\Delta S = \Delta C$ | $D \rightarrow \bar{K} + n\pi, F \rightarrow \eta\pi$ |
| $c \rightarrow u\bar{d}d$ | $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ | $\Delta S = 0$ | $D \rightarrow n\pi$ |
| $c \rightarrow u\bar{s}s$ | $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ | $\Delta S = 0$ | $F \rightarrow K\pi$ |
| $c \rightarrow u\bar{d}s$ | $\sin^4 \theta$ | $\Delta S = -\Delta C$ | $D \rightarrow K + n\pi, F \rightarrow KK$ |

(ahol az F bomlásai közül a fenti a domináns, és az alsó elnyomott.) A bomlástermékek között itt is sok ritka rész van.

Egy egyszerű becslést készítünk a charmed részecskék szemileptonos és nemleptonos bomlási valószínűségeinek az arányára: Mivel m_c -hez képest m_u, m_d és m_s illetve m_μ és m_e elhanyagolható, a két bomlási diagramm Lorentz-struktúrája teljesen azonos. Ha a $\sin^2 \theta \sim 0$, $\cos^2 \theta \sim 1$ közelítést is elfogadjuk, akkor a különbség a két diagramm között mindössze annyi, hogy a nemleptonos diagramm esetén $d\bar{u}$ -nak a végállapotban színindexei is vannak, ezekre fel kell összegezni, így

$$\frac{\Gamma(c, \text{nemleptonos})}{\Gamma(c, \text{szemileptonos})} \approx 3,$$

azaz arra következtethetünk, hogy a charmed részek domináns bomlása a nemleptonos.

Fontos tudni, hogy a QCD-korrekciók a szemileptonos és a nemleptonos gráf esetén különböznek, azonban ezek is a nemleptonos bomlás javára módosítják a fentieket, de nem jelentősen.

3.4. Charmed részek keltése

Megvizsgáljuk, hogy a kísérletekhez hogyan lehet charmed részecskéket keltetni: az (1) kölcsönhatási Lagrange függvényt vizsgálva össze kell vatnunk az abban szereplő tagokat a kísérletileg nyalábban előállítható részecskékkel. Azt láttuk, hogy a neutrínók közül müonneutrínókat lehet jól keltetni. Mivel \bar{s} -kvarkot tartalmazó target nincs, d -kvarkot tartalmazó nyalábbal dolgozhatunk: a

$$\nu_\mu + d \rightarrow c + \mu^-$$

reakció egy sokszor alkalmazott módszer charmed részek keltésére. Általában ezután a

$$c \rightarrow s\mu^+\nu_\mu$$

vagy

$$c \rightarrow se^+\nu_e$$

reakciók valamelyike zajlik le. Eleinte a legtöbbet keresett reakciók a dileptonos folyamatok, pl.

$$\nu_\mu N \rightarrow \mu^+\mu^- X$$

voltak.

4. A Cabibbo-elmélet

4.1. Kis történelem

A hatvanas évek elején vizsgálták a müonok leptonos bomlását:

$$\mu^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu u.$$

1962-ben kísérleti bizonyíték született a két neutrínó különbözőségére. A bomló részecskék élettartamából le lehetett vonni a következtetést, hogy gyenge bomlásról van szó. Az ezt leírni képes Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = -\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_\mu\gamma^\alpha(1+\gamma_5)\mu\bar{e}(1+\gamma_5)\gamma_\alpha\nu_e + \text{h.c.}, \quad (2)$$

és az élettartam-mérésekből magállapítható, hogy $g_\mu = 1,166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$, így

$$\frac{G_\beta}{G_\mu} = 0,98.$$

Ezzel kapcsolatban meg kellett magyarázni annak az okát, hogy

- ez majdnem egy,
- azonban az egytől való eltérés a hibahatárnál jóval nagyobb.

A gyenge kölcsönhatás univerzalitásának az egyik jelentése éppen az lesz, hogy ez majdnem pontosan egy.

Érdeemes észrevenni az analógiát azzal, hogy amögött, hogy az elektron és a müon, illetve a proton és a pion töltése megegyezik, az elektromos áram megmaradása van. Ennek a mintájára emögött az univerzalitás mögött is valamilyen megmaradási törvényt sejtettek: az 1950-es évek végén született meg a CVC-hipotézis (conserved vector current, megmaradó vektoráram), miszerint a gyenge hadronáram $(\bar{p}\gamma^\alpha(1 + \frac{g_A}{g_V}\gamma_5)n)$ vektorrésze $(\bar{p}\gamma^\alpha n)$ megmarad. Ennek az egyik következménye lesz, hogy $\frac{G_\beta}{G_\mu} = 1$.

Az 1950-es és 60-as évek fordulója táján sok egyéb gyenge hadronbomlást figyeltek meg, szükségessé vált ezek osztályozása:

- **szemileptonos** bomlások azok, amelyekben leptonok is részt vesznek. Példák:

$$\begin{aligned}\pi^\pm &\rightarrow \mu^\pm \overset{(-)}{\nu}_\mu, & \pi^\pm &\rightarrow e^\pm \overset{(-)}{\nu}_e, \\ \pi^+ &\rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e, \\ K^+ &\rightarrow \mu^+ \nu_\mu, & K^+ &\rightarrow e^+ \nu_e, \\ \Lambda &\rightarrow p e^- \bar{\nu}_e.\end{aligned}$$

- **nemleptonos** bomlások (karakterisztikus élettartam $\gtrsim 10^{-10}$ s):

$$\begin{aligned}K^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^-, \\ \Lambda &\rightarrow p \pi^-, & \Lambda &\rightarrow n \pi^0.\end{aligned}$$

A sok újonnan felfedezett bomlással felerült a probléma, hogy a Lagrange-függvényeket ki kell-e egészíteni egy-egy új V-A taggal minden új bomlásra. Erre a problémára FEYNMAN és GELL-MANN adta meg a választ: ők a gyenge hadronáram SU(3) szerkezetét vizsgálták. Arra a következtetésre jutottak, hogy mivel a hadronok kvarkokból állnak, a hadronok gyenge bomlásaiért a kvarkok gyenge bomlásai felelősek (analógia: atommagok és magalkotók (p, n)). Ekkor a béta-bomlás: $d \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e$ lesz. A neutron béta-bomlása tehát:

$$\underbrace{(ddu)}^n \rightarrow \underbrace{(duu)}^p + e^- \bar{\nu}_e.$$

Ennek a leírásnak az előnye, hogy további folyamatok leírására is alkalmas, pl. az előbbiből a keresztezéssel kapott folyamat:

$$\underbrace{(d\bar{u})}^{\pi^-} \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$$

is ugyanazzal a mátrixelemmel írható le, így az elmélet paramétereinek a száma csökken, több jóságot kapunk.

Az új elméletben a szemileptonos ritkaságörző folyamatokat leíró Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = -\frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) d \{ \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e + \bar{\mu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_\mu \} + \text{h.c.} \quad (3)$$

Vegyük észre, hogy kvarkszinten a g_A/g_V állandó bevezetésére sem volt szükség. Ez az elmélet a fenti hiányosságok közül sokon segít, ám még mindig nem magyaráz meg néhány dolgot:

- $\frac{G_\beta}{G_\mu} = 0,98$ helyett 1-et ad.
- a ritkaságváltó folyamatokat nem tartalmazza.

Ezeket segít a Cabibbo-elmélet. Ennek lényege (modern terminológiával) az, hogy a gyenge kölcsönhatásban résztvevő d, s kvarkok a határozott tömegű d és s kvarkok egy lineárkombinációja (elektromos töltésük egyforma), azaz a fenti Lagrange függvénybe d, s helyére d', s' -t kell írni, ahol

$$\begin{aligned}d' &= d \cos \theta + s \sin \theta, \\ s' &= -d \sin \theta + s \cos \theta,\end{aligned}$$

ahol θ a Cabibbo-szög. Így $G_\beta = G_\mu \cos \theta$ adódik:

$$\frac{G_\beta}{G_\mu} = \cos \theta = 0,98,$$

és határozott jóslatokat kapunk a ritkaságváltó folyamatok hatáskeresztmetszeteire is. Például az $\overset{K^-}{s\bar{u}} \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ folyamat valószínűségének méréséből kapjuk, hogy $\sin \theta \approx 0,21$, ami az eddigiekkel összefér: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

A fenti (3) Lagrange-függvényt vizsgálva láthatjuk az univerzalitás egy másik jelentését: a szemileptonos folyamatokban az elektron és a müon azonos erősséggel vesz részt.

Ezt a $t - b$ kvarkok bevezetésével egy 3×3 -as unitér mátrixszal lehet általánosítani, az ezt leíró elmélet a *Kobayashi-Maskawa-modell*.