

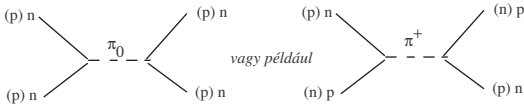
# 15. Erős kölcsönhatás kis energián

2004. június 16.

## 1. Potenciál-modell

### 1.1. Pioncsere, kvantummechanikai kép

Alapvető probléma: nukleon-nukleon szórás:



$\Psi(x)$  skalármező,  $(\square - m^2)\Psi = \frac{1}{c}\eta(x)$  mozgásegyenlet,  $\eta$  a nukleontér.

Lagrange-függvénnyel mindez:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - c\eta\Psi$ , és  $\mathcal{L}_0 = -\frac{c^2}{2}(\partial_\nu\Psi\partial_\nu\Psi + m^2\Psi^2)$ .

Kisenergiás közelítés:  $\eta$  nem operátor, hanem csak  $c$ -szám, ha  $m_\eta \gg \frac{\hbar m}{2}$ . Így nukleonok nem tűnnek el és nem keletkeznek.

Sztatikus nukleon-rendszer:  $\sum_n g_n\delta(x - x_n)$ , és  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} = \Pi = \dot{\Psi}$ .

Kvantálás:  $\Psi$ -hez impulzus:  $\Pi$ , Schrödinger-kép:

$\mathcal{H} = \sum_f \Pi_f \dot{\Psi}_f = \mathcal{H}^0 + \mathcal{H}'$ , ahol  $f$  a szabadsági fokokat jelöli.

Ezek után:  $\mathcal{H}^0 = \frac{1}{2}(\Pi^2 + c^2(\nabla\Psi)^2 + c^2m^2\Psi^2)$  és  $\mathcal{H}' = c\eta\Psi$ .

Itt akkor sorfejtés:  $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k q_k e^{ikx}$  és  $\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k p_k e^{-ikx}$ .

Követelmény:  $p_k^* = p_{-k}$  és  $q_k^* = q_{-k}$ .

Kvantálás:  $p$  és  $q$  legyenek operátorok. Ekkor szokásos kommutációs relációk érvényesek:

$[p_k, q_{k'}] = \frac{\hbar}{i}\delta_{kk'} \Rightarrow [\Pi(x), \Psi(x')] = \frac{\hbar}{i}\delta(x - x')$ , a többi kommutátor pedig nulla.

$H_0 = \int dx \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\sum_k (p_k^* p_k + \omega_k q_k^* q_k)$  és  $\omega_k = c^2\sqrt{k^2 + m^2}$

$H' = \int dx \mathcal{H}' = gc \sum_n \int dx \delta(x - x_n) \Psi(x) = gc \sum_n \Psi(x_n) = gc \sum_n \sum_k q_k e^{ikx_n}$ .

Keltő és eltüntető operátorokkal:  $q_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(a_k + a_k^+) = q_{-k}^+$  és  $p_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}i(a_k^+ - a_k) = p_{-k}^+$ .

Ezekre:  $[a_k, a_l^+] = \delta_{kl}$ , a többi nulla.

$H_0 = \hbar \sum_k \omega_k (a_k^+ a_k + \frac{1}{2})$

$H' = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} (a_k + a_{-k}^+) \sum_n e^{ikx_n} = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} (a_k \sum_n e^{ikx_n} + a_{-k}^+ \sum_n e^{-ikx_n})$

Most már számolhatjuk az átmenetek energiáit:

$$E_j = H_j^0 + E'_j, \text{ és } E'_j = \sum_l \frac{H_{lj}H_{jl}}{E_j^0 - E_l^0}, \text{ ez a másodrendű tag.}$$

$$H_j^0 = \hbar \sum_k \omega_k (N_k + \frac{1}{2})_j \text{ és } E_j^0 - E_l^0 = \hbar \omega_k \text{ és } H_{lj} = gc \sqrt{\frac{\hbar}{2V\omega_k}} \sum_n e^{ikx_n}.$$

$$\text{Ekkor } E_j = -\frac{1}{2}g^2c^2 \sum_{n,n'} \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{\omega_k^2} e^{ik(x_n - x_{n'})} = -\frac{1}{2}g^2 \sum_{n,n'} U(|x - x_n|)^2, \text{ és az } || \text{ jel a } \sum_k \text{ miatt lehet.}$$

$$\text{Innen } U(x) = \frac{c^2}{V} \sum_k \omega_k^{-2} e^{ikx} = \frac{1}{V} \sum_k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}. \text{ És ha } V \rightarrow \infty: U(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dk \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2}. \text{ Ez a szabad skalár propagátora.}$$

Polárkoordinátákra áttérve, reziduum tétellel (két pólus van):  $U(x) = \frac{1}{4\pi|x|} e^{-m|x|}$ , és ez a Yukawa-potenciál.

De ez csak a perturbációs számítás első rendje volt, még lehetne tovább menni pl  $H_{lj}H_{ll'}H_{ll''}H_{ll''l'}$  tagokkal ...

Amúgy ez épp az  $(m^2 - \Delta)U(x) = \delta(x)$  probléma.

$U(x)$  tulajdonságai:  $x \ll 1/m$  esetén Coulomb-szerű, afelett levág.

## 1.2. Általánosítás más cserékre

Kérdés:  $\pi^\pm$  cserére is kiterjeszhető az elmélet?

Ekkor  $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$  vektor kell, és  $U_{1,2} = -\frac{1}{2}g^2(\tau_1^{(1)}\tau_2^{(1)} + \tau_1^{(2)}\tau_2^{(2)})U(x_1 - x_2)$  lesz. Itt  $\tau_1$  és  $\tau_2$  a  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ill.  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  vektorokat viszik egymásba.

Ekkor az energia-sajátértékek:

-	n-n	n-p	p-n	p-p
n-n	0	0	0	0
n-p	0	0	$-gV^2(1-2)$	0
p-n	0	$gV^2(1-2)$	0	0
p-p	0	0	0	0

illetve a megfelelő kölcsönhatások

s.é.	0	$-gV^2(1-2)$	$gV^2(1-2)$	0
kh.	-n	szimm. n-p	antiszimm. n-p	p-p
kh.	0	vonzó	taszító	0

Kemmer szimmetrikus mezonelmélete szól erről, pion tripleteket leírva.

Amúgy egyéb cserék is lehetnek még, ezek pl:

1 $\sigma$	vonzó	2 fm	550 MeV	izoskalár	s=0
1 $\rho, \omega$	taszító	0.5 fm	780 MeV	izovektor	s=1
1 f	vonzó	0.3 fm	1270 MeV	izoskalár	s=2

Baj:  $\frac{g^2}{4\pi} = 14.30 \pm 0.08$ , így nem lesz perturbációs számítás. Meg a sok  $\pi + N \rightarrow \pi' + N'$  kölcsönhatásból néhánynál elmélet és kísérlet nincs összhangban.

Lehet fejleszteni az elméleten, spin, izospin, egyebek jobb figyelembevételével:

$|T, T_3\rangle$  formában írva az állapotokat,  $\pi^i$  izotriplett,  $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  izodublett,  $T = 1/2$  ill.  $3/2$ .  $T_3$  a

szórásban nem számít majd végül a forgásinvariancia miatt, így ezt nem írjuk ki ezután.

$|\pi^+p\rangle = |3/2\rangle$ ,  $|\pi^-p\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|3/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2\rangle$  és a többi kiszámolhatóak a Clebsch-együtthatókkal.

### 1.3. Parciális hullámanalízis

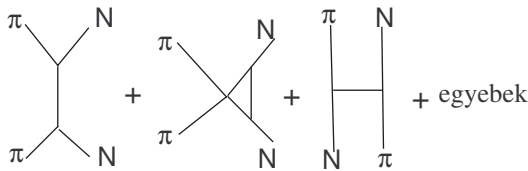
$f_{lj}^{2T} = \frac{1}{2} \sin \delta_{lj}^{2T} e^{i\delta_{lj}^{2T}}$ , ha  $l = 0, 1 \dots s$ ,  $p$  hullám.  $2T = 1, 3$  lehet,  $j$  pedig  $1/2$  és  $3/2$ .

Kisenergiás feltétel:  $l \leq k \frac{\hbar}{m_\pi c}$ . Ekkor  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  kifejezhető  $f$ -ekkel. A végén:  $\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$ .

## 2. Térelméleti leírás

A pszeudoskalár-csatolás:  $\mathcal{L}^{ps} = ig\bar{\Psi}\gamma^5\Psi\phi$ , ahol  $\phi$  a piontér,  $\eta = \bar{\Psi}\gamma^5\Psi$  pedig a nukleontér, és ugyanígy a pszeudovektor-csatolás:  $\mathcal{L}^{pv} = i\frac{f}{m_\pi}\bar{\Psi}\gamma^5\gamma_\lambda\Psi\partial^\lambda\phi$

Feynman-gráfok lehetnek ilyenek:



Ezzel kijön végül:  $\frac{\sigma}{\Omega} = \frac{g^4}{(2\pi)^2} \frac{1}{4m_N^2}$ . Ennek nincs szög- és energiafüggése, ez baj.

Tehát: Yukawa kijött, de a szórás nem. Effektív Hamilton operátoros kép ennyit tud most.

Amúgy ha a kisenergiás feltételt elhagyom:  $\frac{\sigma}{\Omega} = \frac{g^4}{4\pi} \frac{1}{4m_N^2}$  jön ki, ez sem jó. A vektoros rész meg csak  $g \leftrightarrow \frac{f}{m_\pi}$  cserét csinál, úgyhogy ez sem javít sokat.

### 2.1. Többrészecske-csere

Például  $\Delta$ ,  $\rho$ .

$\mathcal{H}_{eff} = \frac{g^*}{m_N} \Delta_\mu^j N \partial_\mu \pi^j$ , ahol  $j$  a részecske-típust jelöli.  $N$  izovektor és spinor,  $\pi$  izovektor és vektor.  $\Delta$  pedig a pion és a nukleon között kicserélődött rezonancia,  $\Gamma = 115 MeV$  szélességgel. Ez már jól adja a  $p$  hullámot!

Chew és Low:  $H_{int} = \frac{f}{m_\pi} \int d^3x \rho(x) \left( \sigma_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (\tau_k \phi_k(x))$ , ahol  $\rho$  a nukleon-sűrűség. És ebből már eleve kijön  $\Delta$ , anélkül, hogy beletennénk!

Az  $s$ -hullámot meg  $\rho$  rezonancia cseréjével lehet megjavítani: gyors  $\rho \rightarrow 2\pi$  szétesés jelenik meg. Itt  $\Gamma = 100 MeV$  és  $m_\rho = 765 MeV$ .

Kísérletből vagy T megmaradásából kijön:  $T = 1$ , így  $\rho^{\pm 0}$  van,  $j = 1$  és  $\rho$  vektormezon.

$$\mathcal{L}_{eff} = ig_{\rho\pi\pi} \rho_\mu (\pi \times \partial_\mu \pi).$$

Ezzel  $\rho \rightarrow 2\pi$  átmeneti valószínűség:  $\Gamma_{\rho\pi\pi} = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} \frac{m_\rho}{12} = \frac{\hbar}{\tau}$ . Sajnos  $\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} \simeq 2$ , erős a csatolás.

$\rho$ -N kölcsönhatás:

$\mathcal{L}_{eff} = \frac{i}{2} g_{\rho NN} \bar{\rho}_\mu (N \gamma_\mu \mathcal{I} N)$ . Univerzalitás:  $g_{\rho NN} = g_{\rho\pi\pi}$ . Szóráshossz:  $a_l = \lim_{k \rightarrow 0} k^{-2l} f_l(k)$ , kiszámolható  $f$  szórási amplitúdókból. Ha  $a_l$  pozitív, vonzás van, ha negatív, taszítás.

$$a_{s1/2}^{2T} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{g_{\rho NN} g_{\rho\pi\pi}}{4\pi} \frac{2m_\pi}{m_\rho^2} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{pmatrix} \frac{1}{m_\pi}, \text{ ha } T = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Az előbbi vektor kísérletileg  $\begin{pmatrix} 0.178 \\ 0.087 \end{pmatrix} \frac{1}{m_\pi}$ , nem rossz ...

Eddigiek tehát:

- potenciálmódel: nemrel, nem jó
- térelmélet: renormálás nincs, nem örülünk ...
- diszperziós relációk
- áramalgebra

Ezek mind együtt kellene!

## 2.2. Pomerancsuk-tétel

$\sigma_{tot}^{a+b} = \sigma_{tot}^{\bar{a}+b}$ , ha  $E_{cm} \rightarrow \infty$ , azaz túl a rezonancia-tartományon.

## 2.3. Froissant-korlát

$\sigma_{tot}(E_{cm}^2) \leq const..$  Ez és az előbbi renormálható térelméletekben igaz, és sok elméletet eleve ki tud szűrni.

## 2.4. Rezonanciák

Eddig volt:  $\rho$  és  $\Delta$ . A rezonanciákat az erős kölcsönhatás hozza létre, ahogy nagyon rövid időre „összeragaszt” 2-3 részecskét.

Az erős kölcsönhatás hatótávja:  $\frac{\hbar}{m_\pi c} = 10^{-13} \text{cm} = 1 \text{fm}$ . Az ennek megfelelő élettartam:  $10^{-23}$  másodperc, ezen túl nem látunk. Innen a tipikus rezonancia-szélesség:  $\Gamma = 140 \text{MeV}$ .

Egyéb rezonanciák:  $\omega$ -mezon  $\Gamma=10 \text{MeV}$  út = 20 fm  
f-mezon taszító  $\Gamma=170 \text{MeV}$  út = 1 fm

Aztán van  $K^*$  mezon, meg egyéb alfajtai ennek.

Kétféle kísérlet van: formációs és produkciós. Előbbinél erős gyanú kell a tömegre, mert éppen ekkor tömegközépponti energiát használunk. Utóbbinál  $E_{cm} \geq m_r$ .

Bomló állapot:  $\Psi(x) = e^{-t/2\tau} e^{-E_r t/\hbar}$ .

$$\sigma = \int_0^\infty \Psi(x) e^{iEt/\hbar} \sim \frac{1}{E_r - E - i\hbar/\tau} = \frac{1}{E_r - E - i\Gamma/2}. \text{ Ez utóbbi a Breit-Wigner formula.}$$

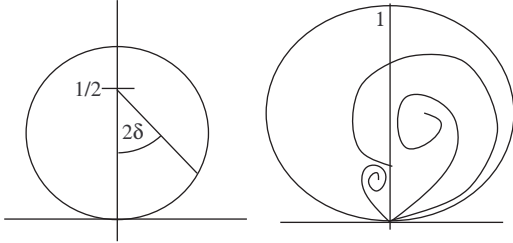
Az elasztikus szórásamplitúdó:  $f_{\text{elasztikus}} = \frac{1}{(E_r - E)2/\Gamma - i} = \frac{\Gamma}{2} \times (\text{Breit} - \text{Wigner})$ .

Abszorpció esetén:  $f_{\text{absz}} = \frac{\rho_{\text{absz}}}{(E_r - E)2/\Gamma - i}$ . Itt  $\rho$  az abszorpció mértéke,  $[0, 1]$  intervallum eleme.

$\Gamma = \Gamma_{\text{elaszt}} + \Gamma_r$ , utóbbi egyszerűen a maradék. Ekkor  $x = \frac{\Gamma_e}{\Gamma}$ ,  $\epsilon = \frac{2(E_r - E)}{\Gamma}$ , és  $T_e = \frac{\Gamma_e/2}{E_r - E - i\Gamma/2} = \frac{x}{\epsilon - i}$ .

Az Argand diagram a  $T_e$  komplex szám által leírt görbe. Komponensekre bontva:  $T_e = \frac{x\epsilon}{1+\epsilon^2} + i\frac{x}{1+\epsilon^2}$ . Innen:  $Re(T_e)^2 + (Im(T_e) - x/2)^2 = x^2/4$ .

Az Argand-diagram alapesetben kör, vagy benne egy hurok:



### 3. Diszperziós relációk

Vegyünk egy  $i \rightarrow f$  átmenetet, és nézzük a valószínűségi amplitúdót! Ugye van az unitér S mátrix, ekkor az átmenetre:  $\langle f|S|i \rangle$ . Bevezetjük  $S = 1 + iR$ -et, és  $R_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) M_{fi}$ -ben az  $M$  szórásamplitúdót. Ezenkívül  $w = |R_{fi}|^2$ .

$$R_{fi}|_{TV} = (2\pi)^4 M_{fi} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{TV} d^4x e^{\frac{i}{\hbar}(p_f - p_i)x}$$

És akkor  $d\sigma_{fi} = \frac{|R_{fi}|^2}{j_i} dN_f$ , ahol  $j_i = \rho_1 \rho_2 v = v/V^2$  ( $\rho \simeq 1/V$ ) a bemenő áram,  $N_f$  a végállapotok száma.

$$\sigma_{tot} = \frac{(2\pi)^4 cV^2}{v} \sum_{N_f, f} |M_{fi}|^2 \delta^{(4)}(p_f - p_i).$$

Unitaritásból:  $i(M_{fi} - M_{if}^*) = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) M_{fn} M_{in}^*$ , innen pedig  $2ImM_{ii} = \sum_n (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) |M_{ii}|^2 = \frac{v\sigma_{tot}}{cV^2}$ .

Az optikai tétel tehát:  $ImM_{ii} = \sigma_{tot}$

#### 3.1. Mandelstam-változók

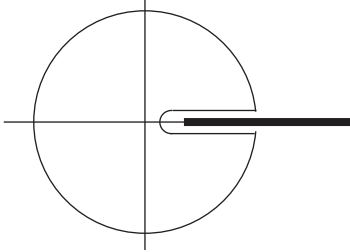
Bevezetjük a Mandelstam-változókat. Kiindulás: bemegy  $p_1$  és  $p_2$ , kijön  $p_3$  és  $p_4$ . Ekkor a következőket definiáljuk:

$$s = (p_1 + p_2)^2 \text{ és } t = (p_1 - p_3)^2$$

Ekkor  $s = -m_A^2 c^2$ -ben szingularitása van a szórásamplitúdónak, ha A részecske cserélődik ki. Ha A és B részecske is, akkor  $s = -(m_A + m_B)^2 c^2$ -nél van a szingularitás, és így tovább.

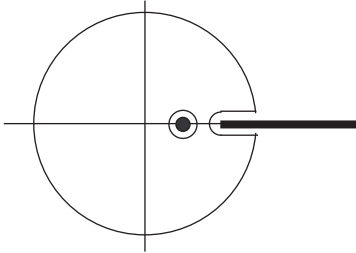
### 3.2. Szórásamplitúdók

Az  $f(w)$  szórásamplitúdónak ugrása van a valós tengely egy részén  $w > w_0$  esetén. Cauchy tétellel mégis kiszámítjuk egy  $C$  kontúron:



Ekkor  $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w')dw'}{w'-w}$ , és a kontúrral a végtelenhez tartunk, ahogy analízisből ez megvolt ...

Ha vágás és pólus is van:



Ekkor  $f = P + \frac{1}{2\pi i} \int_w^\infty \frac{\Delta f dw_1}{w_1 - (w_{val} - i\epsilon)}$ .

### 3.3. Titchmarsh-tétel

Ez három kijelentés ekvivalenciáját garantálja.

**I.**  $w_1$  valós,  $F(w_1)$  komplex és  $Re(F(w_1))$  és  $Im(F(w_1))$  egymás Hilbert transzformáltjai, azaz:

$$Re(F(w_1)) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im(F(w_1))}{w' - w_1} dw' \text{ és viszont. Ekkor } F(w_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(w_1)}{w' - w_1 - i\epsilon} dw'.$$

**II.**  $F(w_1) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{C})$ ,  $F_{\pm}(F(w_1)) = f(t)$ , ekkor  $f(t) = 0$ , ha  $t < 0$  (kauzalitás).

**III.**  $F(w_1 + iw_2)$  analitikus, ekkor

$F$  analitikus a  $w$  felső félsíkon és  $w_1$  szerint négyzetesen integrálható.

$\lim_{w \rightarrow w_1} F(w)$  létezik és megegyezik  $F(w_1)$ -gyel.

$F(w_1)$  egyértelműen meghatározza  $F(w)$ -t

### 3.4. Kramers-Kronig relációk

$n(w) = n_1(w) + in_2(w)$ , törésmutató ( $n_1$ ) és abszorpció együttható ( $2wn_2/c$ ) van ebben.

Kauzalitásból:

$$\operatorname{Re}(n^2(w) - 1) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(n^2(w'))}{w' - w} dw'$$

és

$$\operatorname{Im}(n^2(w)) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(n^2(w') - 1)}{w' - w} dw'$$

Ha alacsony nyomású gázzal van szó, akkor  $n \simeq 1$ ,  $n^2 \simeq 2n - 1$ ,  $n_1 \simeq 1$ ,  $n_2 \simeq 0$ , és így  $\operatorname{Re}(n^2 - 1) = 2n_2 - 1$ . Ebből már jönnek a Kramers-Kronig relációk:

$$n_1(w) - 1 = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_2(w')}{w' - w} dw'$$

és

$$n_2(w) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_1(w') - 1}{w' - w} dw'$$

### 3.5. Keresztezési összefüggések

$n_1$  páros függvény,  $n_2$ , azaz  $n_1(w) = n_1(-w)$  és  $n_2(w) = -n_2(-w)$ . Ezeknek a segítségével a nemfizikai  $w < 0$  eliminálható.

Most már konkrét anyagszerkezeti modellek kipróbálhatóak a következők vizsgálatával:

Szingularitás-mentes szerkezet, analitikusság

$\rightarrow \infty$  viselkedés

Nemfizikai tartomány keresztezése a fizikaiba