

14. Erős kölcsönhatások dinamikája, a QCD alapjai

2004. június 23.

1. Erős kölcsönhatások dinamikája

1.1. $\pi - N$ kölcsönhatás

Akkor lehet a protont és neutront együtt tárgyalni N nukleonként, ha csak erős kölcsönhatás vesz részt a folyamatban. Ugyanis a tapasztalat szerint az erős kölcsönhatás töltésfüggetlen.

Az elektrodinamikában is az van, hogy két elektron úgy hat kölcsön egymással, hogy fotonokkal dobálóznak. De ha sok foton van, akkor van klasszikus határeset, kijön a Coulomb-potenciál. A magerőknél ez viszont nem jogosult. A kölcsönhatást az biztosítja a két nukleon között, hogy kicserélnek egy semleges objektumot (az idő jobbra telik):



Ezen kép segítségével a Yukawa-potenciál megkapható. A következő közelítést alkalmazzuk. Feltételezzük, hogy a két nukleon jóval nagyobb tömegű, mint a közvetítő részecske. Így azon feltevéseinket jogosnak gondoljuk, hogy a két nukleon meg sem moccan a részecskecsere folytán, hanem rögzítve marad, továbbá hogy a folyamat során nem keletkeznek és nem tűnnek el nukleonok. A közvetítő részecskét egy valós skalármezőnek tételezzük fel (ϕ), amelynek forrása az $\eta(x)$ nukleonok. Azaz a közvetítő részecske Lagrange-függvénye

$$L = -\frac{1}{2} [(\partial_\nu \phi)^2 + \mu^2 \phi^2] - \eta \phi.$$

Ezután a Hamilton-operátort felírjuk $a^+(k)$ és $a(k)$ segítségével, majd másodrendű perturbációs számítást végzünk arra vonatkozóan, hogy az η nélküli szabad Hamilton operátor alapállapotának (pion-vákuum plusz két szabad nukleon) energiáját mennyivel emeli meg a Hamiltonhoz hozzáadott η -t tartalmazó perturbáló tag. Ekkor azt kapjuk, hogy ha a két nukleon relatív helyzete \mathbf{x} , akkor a köztük ható Yukawa-potenciál

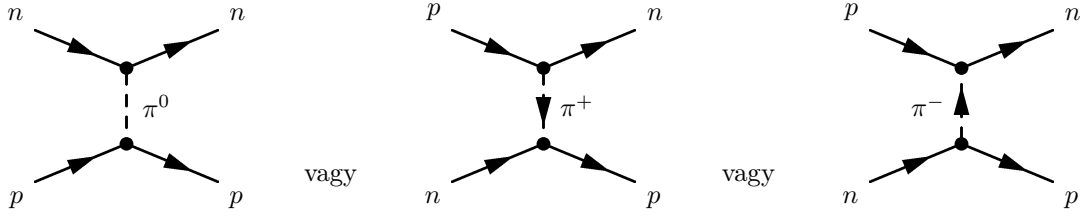
$$U(|\mathbf{x}|) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2 + \mu^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|},$$

ahol μ a kicserélt részecske tömege. Ez egyébként a $(-\Delta + \mu^2)$ -nek a Green-függvénye, azaz

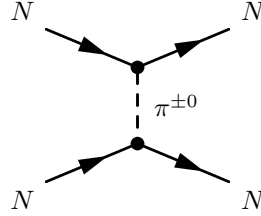
$$(-\Delta + \mu^2)U(|\mathbf{x}|) = \delta(\mathbf{x}).$$

Ha $|\mathbf{x}| \ll \frac{1}{\mu}$, akkor ez a Coulomb-potenciálhoz hasonló, ha $x \gtrsim \frac{1}{\mu}$, akkor viszont gyorsan levág. Ezért $\frac{1}{\mu}$ az erőható távolság. Ha $\mu = 0$, akkor visszakapjuk a Coulomb-potenciált.

Kölcsönhatás nem csak semleges, hanem töltött pionnal is megvalósulhat. A lehetséges esetek:



Így foglalhatjuk össze:



Terjesszük ki a leírást erre az esetre. Egy nukleont most egy \mathbb{C}^2 -beli vektor írjon le. Ebben a bázis:

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ekkor a kétnukleon rendszer már $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ -ben veszi fel az értékeit. Most a potenciál akkor legyen

$$U_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\frac{1}{2}g^2 \left(\tau_1^{(1)} \tau_2^{(1)} + \tau_1^{(2)} \tau_2^{(2)} \right) U(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|).$$

Itt a τ mellett a felső index azt jelenti, hogy melyik Pauli mátrixról van szó, az alsó pedig azt, hogy melyik nukleonra hat a kettő közül, azaz hogy a $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ melyik komponensén hatnak.

$$\frac{1}{2} \left(\tau_1^{(1)} \tau_2^{(1)} + \tau_1^{(2)} \tau_2^{(2)} \right) = g_1 g_2^* + g_2 g_1^*,$$

ahol

$$g_1 = \frac{1}{2} \left(\tau_1^{(1)} - i\tau_1^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g_2 = \frac{1}{2} \left(\tau_2^{(1)} - i\tau_2^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $g_1 g_2^*$ például azt írja le, hogy az első nukleon neutronból protonná változik, a másik pedig protonból neutronba (azaz csak ez a mátrixeleme lesz nem nulla). Az U_{12} mátrixelemei:

	$n - n$	$n - p$	$p - n$	$p - p$
$n - n$	0	0	0	0
$n - p$	0	0	$-g^2 U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$	0
$p - n$	0	$-g^2 U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$	0	0
$p - p$	0	0	0	0

A felső sorban vannak a bemenő állapotok felsorolva, az első oszlopban pedig a kimenő állapotok. A $n - p$ például azt jelenti, hogy az első nukleon neutron, a második proton. Diagonalizálva a sajátértékek:

sajátérték	0	$-g^2 U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$	$g^2 U(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$	0
állapot	$n - n$	$p - n$ szimmetrikus	$p - n$ antiszim.	$p - p$
erő		vonzó	taszító	

A taszító sajátértéknek a magfizikában nincs jelentős szerepe. Ezzel a fajta leírással KEMMER (1938) szimmetrikus mezonelmélete foglalkozik. Ebben egyszerre történhet π^\pm , π^0 csere, a Lagrange-függvény izospin-szimmetrikus.

Az effektív magerőben egyéb egyrészecske cserék is lehetségesek.

cserélt részecske	erő iránya	meddig írja le jól a magerőt	részecske tulajdonságai
$\pi^{0,+,-}$		$r \gtrsim 3 \text{ fm} = 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$	pszeudoskalár, izovektor, $j^P = 0^-$
σ	vonzó	$r \sim 2 \text{ fm}$	550 MeV, izoskalár, 0-spin, $j^P = 0^+$
$\rho^{0,+,-}$	taszító	$r \sim \frac{1}{2} \text{ fm}$	780 MeV, izovektor, 1-spin, $j^P = 1^-$
ω	taszító	$r \sim \frac{1}{2} \text{ fm}$	780 MeV, izoskalár, 1-spin, $j^P = 1^-$
f	vonzó	$r \sim \frac{1}{3} \text{ fm}$	1270 MeV, izoskalár, 2-spin

Ezzel így elméletileg több baj is van. Egyik az, hogy nem igazán szerencsés, hogy két nukleon egy náluk nagyobb tömegű cuccal labdázik. Meg a csatolás erőssége $\frac{g^2}{4\pi} = 14.30 \pm 0.08$. Ez túl nagy. (Ezt 1976-ban, $\pi - N$ szórás analíziséből kapták.)

1.2. $\pi - N$ szórás

A szórás kb. $T_\pi = 250 \text{ MeV}$ -ig rugalmas, utána még egy π akar megjelenni. (Sajnos sehonnan nem derül ki, hogy mi az a T_π , de lehet, hogy a bemenő pion mozgási energiája.) A nukleon izospin szempontjából spinor ($T = \frac{1}{2}$), a pion vektor ($T = 1$), ezért a szórásban a lehetséges izospincsatornák (lehetséges kimenetek) $T = \frac{1}{2}$ és $T = \frac{3}{2}$. Az állapotokat $|T, T_3\rangle$ számpárossal jellemezzük. Mivel a T_3 megmarad, ezért a Wigner–Ecart-tétel miatt az S szórás mátrix nem függhet T_3 -tól. Az állapotok (ezek egyszerűen a Clebsch-Gordan együtthatók):

$$\begin{aligned} |\pi^+ p\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ |\pi^- p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |\pi^0 n\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

A spint is figyelembe vehetjük a parciális hullámok módszerével. Az amplitúdó

$$f_{l,j}^{2T} = \frac{1}{k} \sin \delta_{l,j}^{2T} \cdot e^{i\delta_{l,j}^{2T}}.$$

T a csatorna izospin típusát jelöli ($2T = 1, 3$), k a tömegközépponti összenégiát, j az impulzusmomentum ($j = l \pm \frac{1}{2}$), l a pályaimpulzusmomentum. Kis energián csak az s és p hullám jöhet szóba (azaz $l = 0, 1$), ezért csak 6 fázis lehetséges: $\delta_{s\frac{1}{2}}^{1,3}$, $\delta_{p\frac{1}{2}}^{1,3}$ és $\delta_{p\frac{3}{2}}^{1,3}$. Az amplitúdó $\delta = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ -nél maximális, ilyenkor rezonanciáról beszélünk. Ezen 6 fázis közül a $\delta_{p\frac{3}{2}}^{3,3}$ veszi fel a 90° értéket a $T_\pi = 180 \text{ MeV}$ -nél. Itt összeragad a rendszer, és elemi részecskéként viselkedik. Ez a Δ részecske. Mivel $T = \frac{3}{2}$, ezért 4 Δ rezonancia van: Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 és Δ^- . $m_\Delta = 1238 \text{ MeV} \rightarrow B = 1$. (B a barionszám.) $L_j^p = p_{\frac{3}{2}}^+$. Kellene olyan Hamilton operátor, ami ezt az egész alacsony energiás szórást jól leírja.

1.3. $\pi - N$ térelméleti leírás

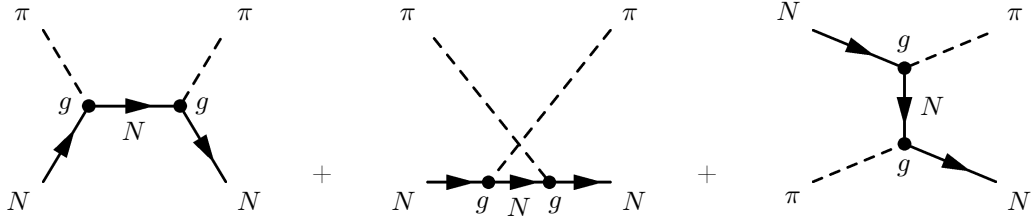
Kellenek effektív Lagrange-függvények. Az első modellben a ψ például a proton tér, φ a pszeudoskalár π^0 pion. Ekkor a pszeudoskalár csatolás

$$L_1^{\text{PS}} = ig \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi,$$

a pszeudovektor csatolás pedig

$$L_1^{\text{PV}} = i \frac{f}{m_\pi} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\lambda \psi \cdot \partial_\lambda \varphi.$$

Az első kép ez volt $O(g^2)$ rendben:

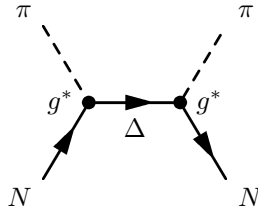


A PS es a PV ugyanazt adja $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ -ra, de ez 1 N -re nem jó közelítés. Ennek egy javított változata

$$L^{\text{PS}} = ig \bar{N} \vec{\tau} \gamma_5 N \vec{\pi}.$$

Itt $N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$, $\vec{\tau}$ az N -re az izospin térben ható Pauli-mátrixokból álló izovektor, $\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \pm i\pi_2)$, $\pi^0 = \pi_3$ izovektor. Ekkor viszont $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{4m_N^2}$ egy szám, nem pedig függvény. Hibái továbbá, hogy az s hullámot adja, ahelyett, hogy a domináns p hullámot adná. Ráadásul $\delta_{p\frac{3}{2}}^3$ előjelét is rosszul adja.

A javításhoz ötlet: Ne nukleont cseréljenek ki, hanem egy Δ -t.



Az effektív Hamiltoni:

$$H_{\Delta, N, \pi}^{\text{eff}}(x) = \frac{g^*}{m_N} \Delta_\mu(x) N(x) \partial_\mu \pi(x).$$

Ez már jól adja a p hullámot, még hozzá a deriválás miatt. A Δ rezonanciát először CHEW és LOW (1954) kapták meg. A Δ rezonancia szélessége itt $\Gamma_{\Delta \rightarrow N\pi} = 115$ MeV.

Már csak az s hullámot kell javítani. ERWIN 1961: ha $T_\pi = 1.9$ GeV, akkor a

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\longrightarrow n + \pi^- + \pi^+ \\ \pi^- + p &\longrightarrow p + \pi^- + \pi^0 \end{aligned}$$

folyamatokban egy csúcs van. Ez a ρ csúcs, $m_\rho = 765$ MeV, a szélessége $\Gamma = 100$ MeV. Tehát a ρ gyorsan bomlik $\rho \rightarrow 2\pi$ bomlással, ezáltal az előbbi folyamatok a

$$\pi + N \longrightarrow \rho + N \longrightarrow 2\pi + N$$

alakúak. A $\rho \rightarrow 2\pi$ átmenetet az

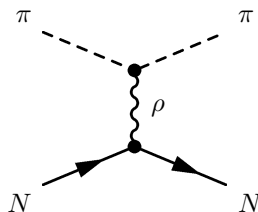
$$L_{\text{eff}} = ig_{\rho\pi\pi} \vec{\rho}_\mu (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi})$$

effektív Lagrange-függvénnyel lehet leírni. Ebből $\Gamma_{\rho \rightarrow 2\pi} = \frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} \frac{m_\rho}{12}$. Ebbe beírva a Γ értékét a csatolás erősségére $\frac{g_{\rho\pi\pi}^2}{4\pi} \sim 2$ adódik, ami sok.

A $\rho - N$ csatolást az

$$L'_{\text{eff}} = \frac{i}{2} g_{\rho NN} \vec{\rho}_\mu N \gamma_\mu \vec{\tau} N$$

effektív Lagrange-függvénnyel írhatjuk le. SAKURAI (1960) felteszi a ρ csatolására az univerzalitást: $g_{\rho\pi\pi} = g_{\rho NN}$. A ρ -val történő $\pi - N$ szórás így néz ki:



Az s hullám helyességét a szóráshosszak alapján láthatjuk. A szóráshossz

$$a_l = \lim_{k \rightarrow 0} k^{-2l} f_l(k)$$

az $f_l(k)$ szórási amplitúdókból kiszámolható. k a tömegközépponti összenergia. Ha $a > 0$ akkor vonzás van, ha $a < 0$ akkor taszítás. A számolásokból

$$a_{s\frac{1}{2}}^{2T=1} = 2 \frac{g_{\rho\pi\pi} g_{\rho NN}}{4\pi} \frac{2m_\pi}{m_\rho^2} \approx \frac{0.2}{m_\pi}$$

$$a_{s\frac{1}{2}}^{2T=3} = - \frac{g_{\rho\pi\pi} g_{\rho NN}}{4\pi} \frac{2m_\pi}{m_\rho^2} \approx - \frac{0.1}{m_\pi}$$

A kísérletek alapján $a_{s\frac{1}{2}}^{2T=1} = \frac{0.178}{m_\pi}$ és $a_{s\frac{1}{2}}^{2T=3} = -\frac{0.087}{m_\pi}$, tehát jól egyeznek.

2. A QCD alapjai

2.1. Bevezető rizsa

Az erős, gyenge és elektromágneses kölcsönhatást is magába foglaló elmélet a Standard Modell. Ez egy nemábeli mértékelmélet, mértékcsoportja az $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)$. Ebből az $SU(3)_c$ a QCD (Quantum Chromodynamics, kvantumszindinamika) mértékcsoportja. A c index a színre utal.

A kísérletek és a számolások pontossága az egyes elméletek esetében (kb. ugyanolyan pontosan tudjuk mérni őket, mint számolni):

QCD	$O(10\%)$
QED	$O(10^{-8}\%)$
gyenge kcsh.	$O(10^{-1}\%)$

Az ilyen elméleteket a futó csatolási állandó jellemzi. Ez azt jelenti, hogy a csatolási állandó függ az s -től, a tömegközépponti energia négyzetétől. Ez például a QED-ben úgy van definiálva, hogy a Compton-szórás teljes hatáskeresztmetszete $\sigma_{\text{tot}} = \alpha^2 \cdot f(s) =: \alpha(s)^2 \cdot f_0(s)$. Az α a finomsztruktúra állandó, $f_0(s)$ pedig az $f(s)$ hatáskeresztmetszet a perturbációs számítás legalacsonyabb rendjében számolva. A QCD csatolási állandója α_s (az s a strong-ra utal) viszont a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

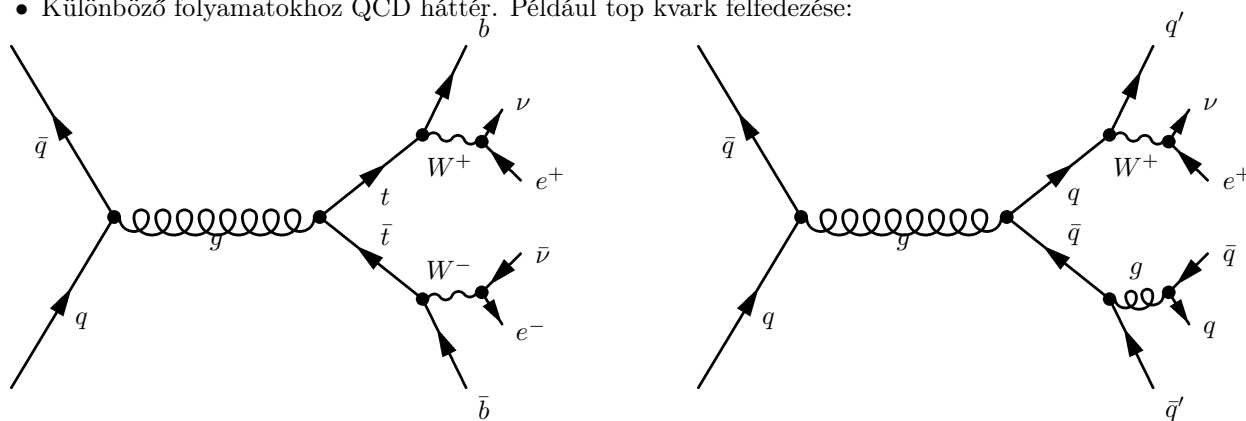
$$\alpha_s(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad \text{aszimptotikus szabadság}$$

$$\alpha_s(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \infty \quad \text{bezárás}$$

Az aszimptotikus szabadság miatt a nagyenergiás szórásokat jól lehet perturbatíven számolni (mert ott kicsi a csatolási állandó, tehát a perturbációs sor „konvergál”).

A QCD alkalmazási területei:

- Nagyenergiájú folyamatokra jóslatokat ad (hatáskeresztmetszeteket ki tudjuk számolni)
- Pontos mérésekhez hadronikus korrekciók számolása
- Különböző folyamatokhoz QCD háttér. Például top kvark felfedezése:



$e^+\nu, b\bar{b}, q\bar{q}$ mérhető.

- Magfizika, nehézionfizika
- Asztrofizika, kozmológia (a nagy bumm utáni 10^{-2} s előtt kvark-gluon plazma)

A QCD fejlesztése 3 fő irányban történik:

- perturbatív QCD
- nemperturbatív QCD (például rács-QCD)
- véges hőmérsékletű QCD

2.2. A QCD kialakulása

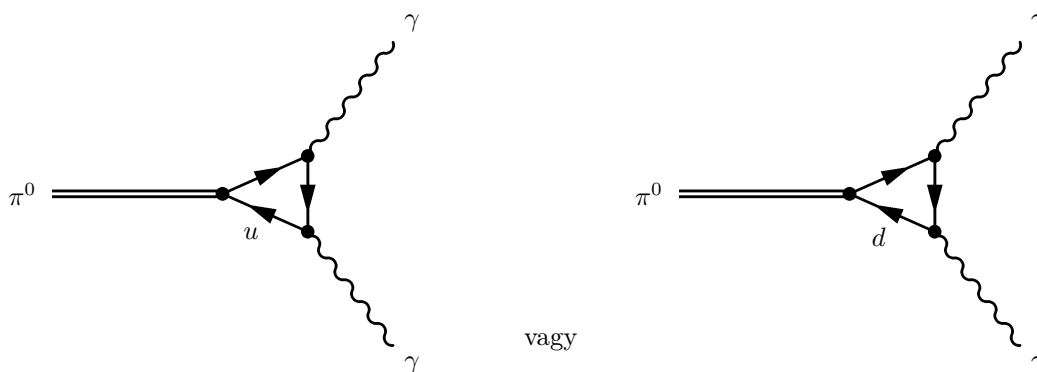
Parton modell. A hadronspektrum szabályosságai miatt arra a következtetésre jutottak a fizikusok, hogy a hadronok kisebb alkotórészekből, ún. partonokból állnak. A hadronok belső szerkezetét nagyenergiájú mélyen rugalmatlan hadron-lepton ütközésekkel vizsgálták. Ezen szórás kísérletekben a totális hatáskeresztmetszet olyannak adódott, ami megegyezik pontszerű alkotórészekre való szóródás totális hatáskeresztmetszeteinek inkoherens összegével. Azaz a leptonok első közelítésben a hadronokban levő, szabadnak tekinthető partonokon szóródnak. Az a tény, hogy a partonok a hadronok belsejében szabadnak tekinthetők, az aszimptotikus szabadságra enged következtetni. (Mert kis távolságokon szabadok \rightarrow a köztük ható kölcsönhatás kis távolságokon kicsi \rightarrow mivel a kis távolság nagy impulzusnak, ennél fogva nagy energiának felel meg, ezért ebből arra következtethetünk, hogy a csatolási állandó nagy energián kicsi \rightarrow aszimptotikus szabadság.)

A szín bevezetése.

- A partonmodell nyomán felépített additív kvarkmodell jó közelítéssel visszaadta a hadronspektrumot, és például a proton és neutron mágneses momentumát is. Azonban akadtak problémák. Például a Δ^{++} spinje $S = \frac{3}{2}$ és izospinjje $I = \frac{3}{2}$, így a hullámfüggvénye az additív kvarkmodell szerint $\Psi = u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow$. Ez azonban teljesen szimmetrikus, de a Δ^{++} fermion, így a Pauli-elv nem teljesülne. Ezért ha bevezetünk egy plusz kvantumszámot, a színt, amely 3 féle értéket vehet fel, akkor már így írhatjuk fel a Δ^{++} hullámfüggvényét: $\Psi = \frac{1}{\sqrt{3!}} \epsilon_{ijk} u^{\uparrow, i} u^{\uparrow, j} u^{\uparrow, k}$. Ez már antiszimmetrikus lesz, összhangban a Pauli elvvel.
- A $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ bomlás élettartama $(8.4 \pm 0.6) \cdot 10^{-17}$ s.

$$\frac{\Gamma_{\gamma\gamma}}{\Gamma_{\text{tot}}} = 98.798 \pm 0.032 \%$$

Az a furcsa, hogy egy semleges hadron szinte csak elektromágnesesen bomlik. Ez a 2γ bomlás ilyen lehet:



Ha nem vezetjük be a szín kvantumszámot, akkor ebből a Γ -ból egy 9-es szorzófaktor hiányzik. A színt bevezetve azonban pont kijön.

- Az e^+e^- annihilációnál az $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ és az $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ reakciók hatáskeresztmetszetének arányát 1972-ben 2-nek mérték. A két reakció gráfja:



A számolások szerint

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{N_c \cdot \sum_q Q_q^2}{Q_\mu^2} = N_c (Q_u^2 + Q_d^2 + Q_c^2 + Q_s^2 + Q_t^2 + Q_b^2).$$

N_c a színek száma, Q_q az egyes kvarkok elektromos töltése, Q_μ a müon elektromos töltése ($|Q_\mu| = 1$). Mivel 1972-ben még csak akkora energián végezték a kísérletet, hogy csak az u , d és s kvarkok adtak lehetséges végállapotot, ezért az $R = 2$ -es eredmény $N_c = 3$ színállapotra utal.

Elméleti fejlemények. A klasszikus nemábeli mértékelméleteket YANG és MILLS dolgozták ki (1954). Ezeket azonban nagyon sokáig nem tudták kvantálni. A mértékelméletek kvantálása FADDEEV és POPOV nevéhez fűződik (1967). A nemábeli mértékelméletek renormálhatóak (T'HOOFT 1971), és jellemző rájuk az aszimptotikus szabadság (T'HOOFT 1972, GROSS–WILCZEK és POLITZER 1973). Ezen tulajdonságai miatt a nemábeli mértékelméletek voltak a legjobb jelöltek arra, hogy a kvarkok közötti kölcsönhatást leírják. GELL–MANN, FRITZSCH: a szín legyen az $SU(3)$ nemábeli mértékcsoport. Lényegében ekkor született meg a QCD.

Bezárás. A megfigyelhető mennyiségek szín-szingletek. Ezért az aszimptotikus állapotok is csak szín-szingletek lehetnek. A kvarkok az $SU(3)$ -nak a $\mathbf{3}$, az antikvarkok a $\mathbf{3}^*$ ábrázolásával transzformálódnak. Ezért egy kvarkot vagy antikvarkot szabadon nem láthatunk. (A $\mathbf{3}$ az $SU(3)$ -nak az önábrázolása, tehát 3 dimenziós, a $\mathbf{3}^*$ pedig ennek a konjugált ábrázolása. Általánosan \mathbf{n} -nel jelölik az (egyik) n dimenziós ábrázolást. Ha ez nem valós ábrázolás, akkor a konjugált ábrázolását \mathbf{n}^* -gal. Ha több n dimenziós ábrázolás is van, akkor a következőt \mathbf{n}' -vel, stb.)

Mivel $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3}^* \oplus \mathbf{6}$, és $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{15} \oplus \mathbf{15} \oplus \mathbf{15} \oplus \mathbf{15}'$, azaz sem $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ -ban, sem $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ -ban nincsen meg a szinglet ábrázolás. Emiatt sem két sem négy kvarkból álló állapot nincsen.

Viszont $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$, tehát egy kvarkból és egy antikvarkból álló hadron létezik (mezonok): $|\text{mezon}\rangle \propto \delta_{ij} |q_1^i \bar{q}_2^j\rangle$. Továbbá $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10}$, így 3 kvarkból álló hadronok is vannak (barionok): $|\text{barion}\rangle \propto \epsilon_{ijk} |q_1^i q_2^j q_3^k\rangle$.

2.3. A QCD Lagrange-függvénye

A kísérletek alapján a kvarkok feles spinűek. 6 különböző kvark-íz van: u , d , c , s , t és b . Így tehát a kvarkokat egy $\psi: M \rightarrow \mathbb{C}^{3(\text{szín}) \cdot 6(\text{íz}) \cdot 4(\text{spin})}$ mező írja le, amelynek a szabad Lagrange-függvénye:

$$L_0^F = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

Az m színben és spinben az identitás, az ízben pedig pozitív definit önadjungált (azaz a tömegeket tartalmazza sajátértékként). Mértékcsoportként az $SU(3)$ -mat vesszük, ábrázolásnak az önábrázolás tenzorsorozva az íz és Dirac indexekben levő identitással. A kovariáns deriválás

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a,$$

ahol g a QCD csupaszcsoatlási állandója, és $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ az $SU(3)$ önábrázolásban levő generátorai. A Gell–Mann-mátrixok a szín indexekben hatnak:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} & 1 \\ & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

Az

$$U(x) = e^{-iT^a \theta^a(x)}$$

által meghatározott mértéktranszformációval eltranszformált ψ és A :

$$\psi' = U\psi$$

$$T^a A'_\mu{}^a = U(A_\mu^a T^a - \frac{i}{g} U^{-1} \partial_\mu U) U^{-1}$$

Infinitezimális $\theta^a(x)$ mértéktrafó esetén

$$A'_\mu{}^a(x) - A_\mu^a(x) = \delta A_\mu^a(x) = f^{abc} \theta^b(x) A_\mu^c(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a(x),$$

ahol f^{abc} az $SU(3)$ Lie-algebrájának struktúraállandói. Mivel az adjungált ábrázolásbeli \mathbf{T} generátorokra igaz, hogy

$$(\mathbf{T}^a)^{bc} = -i f^{abc},$$

ezért a globális mértéktranszformációkra az A az adjungált ábrázolásban transzformálódik. A tererősség:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b$$

Ez az

$$F'^a_{\mu\nu}(x) T^a = U(x) F_{\mu\nu}^a(x) T^a U^{-1}(x)$$

módon transzformálódik. Az

$$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

már invariáns. A QCD Lagrange-függvénye:

$$L_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

Áltanlánosságban az $SU(N)$ -re a következők igazak.

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

A Lie-algebra generátorokat úgy választjuk, hogy az önábrázolásban

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$$

legyen. Ekkor

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),$$

$$(T^a T^a)_{ij} = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ij} = C_F \delta_{ij},$$

$$(T^a T^b T^a)_{ij} = -\frac{1}{2N} T_{ij}^b,$$

$$f^{acd} f^{bcd} = N \delta^{ab}.$$

Az $SU(3)$ esetén $C_F = \frac{4}{3}$, ez sokszor előjön a számolások során.

2.4. A QCD kvantálása

Itt szó szerint azt kell elmondani, ami a 8-as tételben szerepel a mértékelméletek kvantálásánál.

2.5. Gráfszabályok

A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned}
 L &= L_G + L_{GF} + L_{FP} + L_F \\
 L_G &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} && \text{a gluon-tér dinamikája} \\
 L_{GF} &= -\frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 && \text{gauge fixing} \\
 L_{FP} &= (\partial^\mu \chi^{*a}) D_\mu^{ab} \chi^b && \text{Faddeev-Popov} \\
 L_F &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi && \text{kvarkok}
 \end{aligned}$$

A szabad Lagrange függvény:

$$\begin{aligned}
 L_0 &= L_0^G + L_0^{FP} + L_0^F \\
 L_0^G &= -\frac{1}{2} A_\mu^a(x) K^{ab,\mu\nu} A_\nu^b(x) \\
 L_0^{FP} &= -\chi^{*a} K^{ab} \chi^b \\
 L_0^F &= -\bar{\psi} \Lambda \psi,
 \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 K^{ab,\mu\nu} &= \delta^{ab} \left(-g^{\mu\nu} \square + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right), \\
 K^{ab} &= \delta^{ab} \square, \\
 \Lambda &= -i\partial_\mu \gamma^\mu + m.
 \end{aligned}$$

Ezáltal a propagátorok:

Gluon propagátor:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x) = \delta^{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} =: d_{\mu\nu}(k) \right]$$

Ghost propagátor:

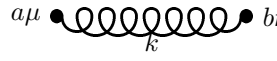
$$D^{ab}(x) = -\delta^{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon}$$

Kvark propagátor:

$$S^{ij}(x) = \delta^{ij} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{m - \not{p} - i\varepsilon} \quad \left(\frac{1}{m - \not{p}} = \frac{m + \not{p}}{m^2 - p^2} \right)$$

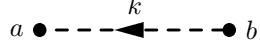
A gráfszabályok:

gluon propagátor



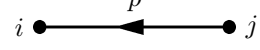
$$\delta^{ab} \frac{d_{\mu\nu}(k)}{k^2}$$

ghost propagátor



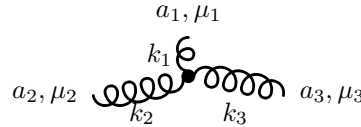
$$-\delta^{ab} \frac{1}{k^2}$$

kvark propagátor



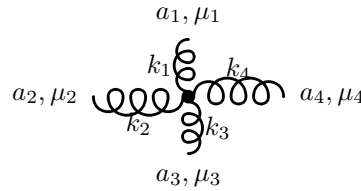
$$\delta_{ij} \frac{1}{m - \not{p}}$$

3-gluon vertex



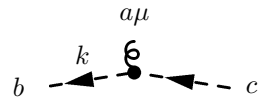
$$-igf^{a_1 a_2 a_3} V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(k_1, k_2, k_3)$$

4-gluon vertex



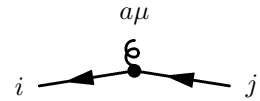
$$-g^2 W_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

gluon-ghost vertex



$$-igf^{abc} k_\mu$$

gluon-kvark vertex



$$g\gamma_\mu T_{ij}^a$$

$$V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(k_1, k_2, k_3) = (k_1 - k_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} + (k_2 - k_3)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (k_3 - k_1)_{\mu_2} g_{\mu_3 \mu_1}$$

$$\begin{aligned} W_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4} = & (f^{a_1 a_3 a} f^{a_2 a_4 a} - f^{a_1 a_4 a} f^{a_3 a_2 a}) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} + \\ & + (f^{a_1 a_2 a} f^{a_3 a_4 a} - f^{a_1 a_4 a} f^{a_2 a_3 a}) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\ & + (f^{a_1 a_3 a} f^{a_4 a_2 a} - f^{a_1 a_2 a} f^{a_3 a_4 a}) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_3 \mu_2} \end{aligned}$$