Az elektron-foton kölcsönhatás (folyamatok)

Itten most a Compton-szórás hatáskeresztmetszetét kell kiszámolni, felhasználva a QED-ben és úgy általában a kvantumtérelméletben ismert dolgokat (Feynman-szabályok, integrálás, Dirac-delták négyzete, stb.).

Amiből kiindulunk, az a QED Lagrange-sűrűsége:

$$L = L_{EM} + L_E + L_{KH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\imath\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{1}$$

ahol

- $L_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$;
- $L_{KH} = e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$;
- $L_E =$ az összes többi.

Ha $\alpha = 0$: Landau-mérték, $\alpha = 1$: Feynman-mérték, $\alpha = \infty$: unitér mérték.

A kölcsönhatás: $H_i = e : \bar{\psi}_\beta\gamma^\mu_{\beta\alpha}\psi_\alpha : A_\mu$, itten van két ψ és egy A, azaz egyfajta vertex van: egy bemenő elektron (a $\bar{\psi}$), egy kimenő (a ψ) és egy foton (A). A Compton-szórásban mivel van bemenő és kimenő foton is, ezért legalább két vertex lesz legalacsonyabb rendben, és két vertex az azt jelenti, hogy másodrendig kell számolni.

Összesen két topológialiag különböző gráf lesz másodrendben. (Bemegy egy foton + elektron, csinál egy virtuális elektront majd az szétmegy egy fotonra és egy elektronra illetve bemegy egy elektron, kibocsát egy fotont és lesz belőle egy virtuális elektron, majd ez elnyeli a bejövő fotont és lesz belőle egy normális elektront $\leftarrow$ ezt azért írom így, mert kevesebb ideig tart mint ábrákat rajzolni és ugyis mindenki tudja miről van szó. Virtuális: ami kinematikailag nem fizikai. ,,Komolyan" szólva: a virtális elektron impulzusára kell integrálni, függetlenül attól, hogy tömeghéjon van-e vagy sincsen.)

Ki kell számolni a szórásmátrixot. A szórásmátrix négyzetével lesz arányos a hatáskeresztmetszet. Hajrá.

A szórásmátrixot a Feynman-szabályok segí tségével megkonstruált integrál kiszámí tásával kapjuk:

- A vertexeknek megfelel:

$$-\mathrm{i}e\gamma^\mu_{\alpha\beta}(2\pi)^4\delta\left(\sum p\right) \tag{2}$$

  (itten $\sum p$ a bemenő és kimenő impulzusok előjeles összege, pl. ha bemegy egy p-s elektron és egy k-s foton ($p, k \in M^*$, szóval négyesimpulzus), és kijön egy q impulzusú virtuális ($q^2 \neq m^2$, m az elektron tömege) elektron, akkor $\sum p = p + k - q$).

- Bemenő elektron:

$$\frac{u_\alpha(p,\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}, \tag{3}$$

  kimenő elektron:

$$\frac{\bar{u}_\alpha(p',\sigma')}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{4}$$

- Bemenő pozitron:

$$\frac{\bar{v}_\alpha(p,\sigma)}{(2\pi)^{3/2}}, \tag{5}$$

kimenő pozitron:

$$\frac{v_\alpha(p',\sigma')}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{6}$$

- Bemenő foton:

$$\frac{\varepsilon_\mu(k)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}}, \tag{7}$$

kimenő foton:

$$\frac{\varepsilon^*_\mu(k')}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k'_0}}. \tag{8}$$

- Elektronpropagátor (q impulzusú elektron propagál):

$$\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\frac{(\not{q}+m)_{\beta\alpha}}{q^2-m^2+\mathrm{i}0} \tag{9}$$

(itten a d^4q-t csak azért mert a belső propagátorokra úgyis integrálni kell).

- Fotonpropagátor: hagyjuk, úgysem kell ide. Najó.

$$\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g_{\nu\rho}}{k^2+\mathrm{i}0}. \tag{10}$$

Feynman-mérték.

Ebből simán összerakjuk az S-mátrix integrál-akármit, az integrandus hasában két tag lesz (a két gráfnak megfelelően), egy integráljel lesz csak, mert csak egy belső elektron-propagátor van. Szóval:

$$S = \frac{\bar{u}(p',\sigma')_{\beta'}}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{\varepsilon'^*_\nu(k)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k_0}}\cdot\frac{u(p,\sigma)_\alpha}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{\varepsilon_\mu(k')}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k'_0}}\cdot\cdot\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\left(\frac{\not{q}+m}{q^2-m^2+\mathrm{i}0}\right)_{\alpha'\beta}$$
$$\Big\{(-\mathrm{i}e(2\pi)^4\gamma^\nu_{\beta'\alpha'}\delta(q-p'-k'))(-\mathrm{i}e(2\pi)^4\gamma^\mu_{\beta\alpha}\delta(q-p-k))+$$
$$(-\mathrm{i}e(2\pi)^4\gamma^\mu_{\beta'\alpha'}\delta(q+k-p'))(-\mathrm{i}e(2\pi)^4\gamma^\nu_{\beta\alpha}\delta(q+k'-p))\Big\}. \tag{11}$$

Itten p, k a bemenő elektron, foton, p', k' pedig a kimenő elektron, foton impulzusa, a többi értelemszerű.

Ronda, de a mienk. Szóval az integrált a δ miatt könnyen el lehet végezni, a konstansokat (amik az integráljel előtt vannak) összeejtjük a γ-kkal, és minden jóval egyszerűbb lesz:

$$S=\frac{-\mathrm{i}e^2\delta(p'+k'-p-k)}{(2\pi)^2\sqrt{2k_0k_0'}}\cdot$$
$$\cdot\bar{u}(p',\sigma')\cdot\left[\not{\epsilon}'^*\frac{\not{p}+\not{k}+m}{(p+k)^2-m^2+\mathrm{i}0}\not{\epsilon}+\not{\epsilon}*\frac{\not{p}+\not{k}'+m}{(p-k')^2-m^2+\mathrm{i}0}\not{\epsilon}'^*\right]\cdot u(p,\sigma). \quad (12)$$

No, akkor most jön a baj, ugye a hatáskereszmetszet az S^2-tel arányos, viszont az előbbi képletben van egy δ, amit négyzetre kellene emelni. Ez nem az igazi, szóval kicsit trükközünk.

Legyen V térfogatunk, amiben az egészet nézzük, és tartson az esemény T ideig! $V=L^3$, doboz, L oldalhosszúsággal. Ekkor $\mathbf{p}=\frac{2\pi}{L}(p_1,p_2,p_3)$, ilyesmi lesz pl. egy dobozba zárt jól megkvantált impulzus vagy miazisten. Minden cucc helyére bevezetjük a ,,dobozos'' változatát, ami a doboz nélküli, szorozva mindenféle faktorokkal (2π-kel, V-kkel, T-kkel...):

- $\psi_\alpha^{\mathrm{doboz}}=\left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha/2}\cdot\psi_\alpha$,
- $S_{\beta\alpha}=\left(\frac{V}{(2\pi)^3}\right)^{\frac{N_\alpha+N_\beta}{2}}S_{\beta\alpha}^{\mathrm{doboz}}$,

N_α az α állapotban levő részecskék száma, α a bemeneti, β a kimeneti állapot (ja, végig ez volt, csak előbb még nem irtam oda...). Compton-szórásra: $N_\alpha=N_\beta=2$, tiszta sor.

Ekkor a hármas Dirac-delták dobozos változatára már meg tudjuk csinálni a négyzetre emelést:

$$|\delta_V(p-p')|^2=\delta_V(p-p')\cdot\delta_V(0)=\delta_V(p-p')\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}, \quad (13)$$
$$|\delta_T(E_\beta-E_\alpha)|^2=\delta_T(E_\beta-E_\alpha)\cdot\delta_T(0)=\delta_T(E_\beta-E_\alpha)\cdot\frac{T}{2\pi}. \quad (14)$$

(Itten δ_T egydimenziós, δ_V háromdimenziós D-delta, értelemszerűen, és $\delta\equiv\delta_T\delta_V$.)

Csinálunk még egy olyat, hogy az $S_{\beta\alpha}$-ból leválasztjuk a D-deltakat:

$$S_{\beta\alpha}=:-2\pi\mathrm{i}\delta_V(p_\beta-p_\alpha)\delta_T(E_\beta-E_\alpha)M_{\beta\alpha} \quad (15)$$

Itten ez az $M_{\beta\alpha}$ az összefüggő mátrixelem vagy miazisten, állí tólag azért összefüggő, mert nincs benne D-delta.

Akkor most összetesszük a tudásunkat. Szórásnál ($N_\alpha=2$) van olyan, hogy fluxus, ez a V térfogatra: $\Phi_\alpha=\frac{u_\alpha}{V}$, ahol u_α a relatív sebesség:

$$u_\alpha=\frac{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1^2m_2^2}}{E_1\cdot E_2}=\left|\frac{p_1}{E_1}-\frac{p_2}{E_2}\right|. \quad (16)$$

A második képlet csak tömegközépponti rendszerben igaz.

Tudjuk, hogy az átmeneti valoszí nűség:

$$\mathrm{d}P(\alpha\to\beta)=(2\pi)^2\left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha-1}\frac{T}{2\pi}|M_{\alpha\beta}|^2\delta(p_\beta-p_\alpha)\mathrm{d}\beta \quad (17)$$

(itt $\mathrm{d}\beta$ a kimeneti fázistérfogat: $\mathrm{d}\beta = \prod_i \mathrm{d}^3 p_i'.$) Felhasználva, hogy

$$\mathrm{d}\sigma(\alpha \to \beta) = \frac{\mathrm{d}\Gamma(\alpha \to \beta)}{\Phi_\alpha} = \frac{\mathrm{d}P(\alpha \to \beta)}{T \cdot \Phi_\alpha}, \tag{18}$$

kapjuk:

$$\mathrm{d}\sigma(\alpha \to \beta) = (2\pi)^4 \frac{1}{u_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta(p_\beta - p_\alpha) \mathrm{d}\beta. \tag{19}$$

Ahol M-et már ismerjük, az volt az a nagy, ronda képlet, mint az S-nél, csak a D-deltákat már kiszedtük:

$$\begin{aligned} M = & \frac{e^2}{4(2\pi)^3 \sqrt{k_0 k_0'}} \cdot \\ & \cdot \bar{u}(p', \sigma') \cdot \left[\not{\epsilon}'^* \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^2 - m^2 + \mathrm{i}0} \not{\epsilon} + \not{\epsilon} * \frac{\not{p} + \not{k}' + m}{(p-k')^2 - m^2 + \mathrm{i}0} \not{\epsilon}'^* \right] \cdot u(p, \sigma). \end{aligned} \tag{20}$$

A két belső nevezőt átírhatjuk egyszerűbbre:

$$(p+k)^2 - m^2 = p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2 = 2pk, \tag{21}$$

hiszen $p^2 = m^2$ és $k^2 = 0$. A relatív sebesség pedig nem más, mint:

$$u_\alpha = \frac{|p \cdot k|}{p_0 k_0}. \tag{22}$$

Laborrendszerbe megyünk, ahol a target (az elektron) áll:

$$p = (m, 0, 0, 0). \tag{23}$$

A bejövő és a kimenő foton frekije $\omega(') = k_0(') = \frac{p \cdot k}{m}$, ez a második egyenlet csak laborrendszerben igaz. A $\delta(p + k - p' - k')$-t kifejtve, beírva ezeket a dolgokat amik laborrendszerre igazak, kapjuk:

$$\omega' = \omega \frac{m}{m + \omega(1 - \cos\vartheta)}, \tag{24}$$

Itten ϑ $\mathbf{k}$ és $\mathbf{k}'$ hármasimpulzusok bezárt szöge. Ez jó, ezt specrelből eddig is tudtuk.

Márcsak akkor $|M|^2$-et kell kiszámolni. Ezt nem részletezem annyira, mert Takács Gábor is házinak adta fel a nagyrészét. A lényeg: sok γ-s szorzatnak a nyomát kell kiszámolni, hiszen M ilyen alakú:

$$M \sim \bar{u}_\alpha(p', \sigma') A_{\alpha\beta} u_\beta(p, \sigma) \tag{25}$$

(A az a két hülye tört összege, ami végülis két spinorindexet hordoz, ami egy rakat γ szorzatából jön.) Azaz $|M|^2$ valami ilyesmi lesz:

$$\begin{aligned} M^2 \sim & \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{u}_\alpha(p', \sigma') A_{\alpha\beta} u_\beta(p, \sigma) \gamma^0 \bar{u}_\gamma(p, \sigma) A^+ \gamma^0_{\gamma\delta} u_\delta(p', \sigma') = \\ & \mathrm{Tr}\left[A \frac{\not{p} + m}{2p_0} \gamma^0 A^+ \gamma^0 \frac{\not{p}' + m}{2p_0'} \right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Ami itten nem trivi elsőre: bejön egy pár γ^0, gonolom az ilyen nyomos azonosságok meg a négyzetreemelés miatt. Az A^+ is a négyzetreemelés miatt kell (ahogyan komplex számoknál: $|z|^2 = z^* z$). Illetve a két tört az a Dirac-bispinorokra vonatkozó

$$\sum_\sigma u_\alpha(p,\sigma) u_\beta(p,\sigma) = \left(\frac{\not p + m}{2p_0} \right)_{\alpha\beta} \tag{27}$$

azonosságból jön. Ja igen, szumma a spinekre (σ-kra): a bejövő elektronok spinjét nem ismerjük, így σ-ra átlagolni kell, a kimenő elektronok spinjét meg nem mérjük, így arra összegezni kell. Az átlagolás miatt ugye valahol egy 1/2 bejön, de ez a nagy dzsuvába elveszett nekem. Beírva

$$A = \not\varepsilon'^* \frac{\not p + \not k + m}{2p \cdot k} \not\varepsilon - \not\varepsilon \frac{\not p + \not k' + m}{2p \cdot k'} \not\varepsilon'^* \tag{28}$$

értékét (miért van minusz a két tag között, mikor régen még plusz volt, tudja a hóhér), ezt kell kiszámolni:

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\frac{\not\varepsilon' \not\varepsilon \not k}{2p \cdot k} + \frac{\not\varepsilon \not\varepsilon' \not k'}{2p \cdot k'} \right) \cdot \left(\frac{\not p + m}{2p_0} \right) \cdot \left(\frac{\not k \not\varepsilon \not\varepsilon'}{2p \cdot k} + \frac{\not k' \varepsilon' \not\varepsilon}{2p \cdot k'} \right) \cdot \left(\frac{\not p' + m}{2p_0'} \right) \right]. \tag{29}$$

Kihasználjuk, hogy:

- páratlan sok γ szorzatának nyoma 0
- $\not a \not b = - \not b \not a + 2a \cdot b$
- $k^2 = k'^2 = 0$
- $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$
- $\not a^2 = a^2$
- $\varepsilon \cdot k = 0$ (transzverzális polarizáció van!)

Mindent beírunk mindenhova, és azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \cdot \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\varepsilon' \cdot \varepsilon) - 2 \right], \tag{30}$$

ahol már minden betűnek tudjuk a jelentését. Ez a Klein-Nishina formula.

A fentiekhez hasonlóan ki lehet még számolni:

- Möller-szórás (elektron-elektron szórás, fotonpropagátorral)
- Bhabha-szórás (elektron-pozitron szórás, fotonpropagátorral)
- Mott-szórás (elektron elmegy egy atommag mellett)
- Párkeltés, annihiláció (egymás fordítottjai, egyébként meg fejreállított Compton-szórásos gráfok)