9. Renormálás

$\boxed{\text{QED}}$

Renormált mező: propagátora ugyanúgy viselkedik a pólus környékén mint a szabad mezőé és a tömege a pólusban van

$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi - V(\phi)$ a csupasz mennyiségekkel

→ ezen op. Green-fv.-et akarjuk renormálni

$\phi_r = Z^{-1/2}\phi$ így $\langle \phi_0^r | O_e | \phi_{1,\sigma}^r \rangle = (2\pi)^{-3/2} u_e(q,\sigma)$

$m_r^2 = m^2 + \delta m^2$ a normálás

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$

$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^r\partial^\mu\phi^r - \frac{1}{2}m_r^2\phi_r^2$

$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}(Z-1)\left[\partial_\mu\phi^r\partial^\mu\phi^r + \frac{1}{2}m_r^2\phi^r\right] + \frac{1}{2}Z\delta m^2\phi^2 - V_r(\phi_r)$

$V(\sqrt{Z}\phi_r) = V(\phi)$

1PI gráfokat nézzük, hogy kiszámoljuk a propagátort

$\Delta(p) = \left[-\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m^2-i\epsilon}\right] + [\dots]\, i(2\pi)^4\Sigma(p^2)[\dots] + \dots$

geom. sor: $\Delta(p) = \frac{1}{p^2+m^2-\Sigma(p^2)-i\epsilon}$ $\quad \Sigma(p^2) = -(Z-1)(p^2+m^2) + Z\delta m^2 + \Sigma_{1\text{hurok}}(p^2)$

Kell:
- $\Sigma(-m^2) = 0$
- $\frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)\big|_{p^2=-m^2} = 0$ (egység reziduum legyen, mint a szabad propagátornál)

$\Rightarrow Z\delta m^2 = -\Sigma_{1\text{hurok}}(-m^2)$ és $Z = 1 + \frac{d\Sigma_{1\text{hurok}}}{dp^2}\Big|_{p^2=-m^2}$

Feles spinre ugyanúgy $\quad \mathcal{L} = -\bar\psi(\not\partial + m)\psi - V(\bar\psi\psi)$

$\psi_r = Z_2^{-1/2}\psi$ $\quad \mathcal{L}_0 = \bar\psi_r(\not\partial + m_r)\psi_r$

$m_r = m + \delta m$ $\quad \mathcal{L}_1 = -(Z_2-1)(\bar\psi_r(\not\partial+m)\psi_r) + Z_2\delta m\,\bar\psi_r\psi - V(Z_2\bar\psi_r\psi)$

fermion propagátor

$\Delta(p) = \left[\frac{1}{i}\frac{1}{\not p + m - i\epsilon}\right] + [\dots]\,\Sigma(p)\,[\dots] = \frac{1}{i\not p + m - \Sigma(p) - i\epsilon}$

$\Sigma(p) = -(Z_2-1)(i\not p + m) + Z_2\delta m + \Sigma_{1\text{hurok}}(\not p)$

$\Sigma(im) = 0$ és $\frac{\partial\Sigma}{\partial\not p}\Big|_{\not p=im} = 0 \Rightarrow Z_2\delta m = \Sigma_{1\text{hurok}}(im)$ és $Z_2 = 1 - i\frac{\partial\Sigma_{1h}}{\partial\not p}\Big|_{\not p=im}$

<u>töltés renormálás:</u> ugye $\psi_\ell \to e^{iq_\ell \alpha}\psi_\ell$ szimmetria, $J^\mu = -i\sum_\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\ell)} q_\ell \psi_\ell$

$Q = \int d^3x\, J^0 \quad \frac{dQ}{dt} = 0$, stb $\quad [\Lambda^{\mu\nu}, Q] = 0$ minden Λ homogén Lorentz-trafó

így $Q\Psi_0 = 0$; $Q\Psi_{p,\sigma,n} = q_{(n)}\Psi_{p,\sigma,n}$

$\Rightarrow \mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ + tag jön be + $\partial_\mu \to \partial_\mu - iA_\mu$

végül $A^\mu_r = Z_3^{-1/2}A^\mu$ és $q_r = \sqrt{Z_3}\,q$

<u>Tehát:</u> $\psi_r = Z_2^{-1/2}\psi$

$A_r^\mu = Z_3^{-1/2}A^\mu$ és $Z_2, Z_3, \delta m$: prop. pólusa ugyanott és ugyanolyan, mint a szabad mezőé

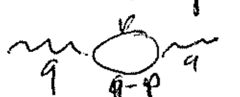
$e_r = Z_3^{1/2}e$

$m_r = m + \delta m$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar\psi(\not\partial + m)\psi - ieA_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi + \mathcal{L}_2$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (Z_2 - 1)\bar\psi(\not\partial + m)\psi + Z_2\,\delta m\,\bar\psi\psi + ie(Z_2 - 1)A_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi$$

Példa: vákuum-polarizáció

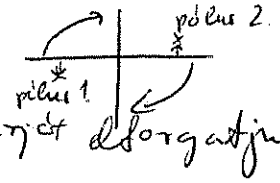


$\Delta' = \frac{\text{foton-prop}}{1 - \Pi\Delta} \qquad i(2\pi)^4\,\Pi^{\mu\nu}(q)$

$$i(2\pi)^4\,\Pi^{\rho\sigma}_{1\,\text{hurok}}(q) = -\int d^4p\,\mathrm{Tr}\left\{\left[-\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{-i\not p + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon}\right](2\pi)^4 e\gamma^\rho \times \left[-\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{-i(\not q - \not p) + m}{(q-p)^2 + m^2 - i\epsilon}\right](2\pi)^4 e\gamma^\sigma\right\}$$

itt egy nevezői átalakítás kell $\int_0^1 dx(\ldots)$-el, stb

+ Wick-forgatás



integrálás irányát elforgatjuk

de még így is végtelen $\Rightarrow$ dimenziós regularizáció(ϵ)

('t Hooft – Veltman)

+

levágás (Λ)

végén $\Lambda \to \infty$ és $\epsilon \to 0$ $(d \to 4)$ kell

$\boxed{\text{QCD}}$

Regularizálás

példa: fermion sajátenergia :

$$S = \frac{1}{m+\not p} + \frac{1}{m+\not p}\Sigma\frac{1}{m+\not p} + \dots = \frac{1}{m-\not p-\Sigma(p)}$$

$$\Sigma(p) = \int\frac{d^4\xi}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\underbrace{(g\gamma_\mu T^a_{il})}_{\text{vertex 1}}\underbrace{\left(\frac{\delta_{ln}}{m-(\not p-\not\xi)}\right)}_{\text{f-prop}}\underbrace{\left(\frac{d^{\mu\nu}(\xi)}{\xi^2}\delta^{ab}\right)}_{\text{g-prop}}\underbrace{(g\gamma_\nu T^b_{nj})}_{\text{vertex 2}}$$

$T^a_{il}T^a_{lj} = C_F\delta_{ij}$ $d^{\mu\nu}(\xi) = g^{\mu\nu}$ Feynman-mértékben

$$\Sigma_{ij}(p) = \delta_{ij}(p)\, C_F g^2\int\frac{d^4\xi}{(2\pi)^4 i}\frac{\gamma_\mu(m+\not p-\not\xi)\gamma^\mu}{\xi^2(m^2-(p-\xi)^2)}$$ ez log-divergens!

dimenziós regularizáció: $d^D\xi$, $g^2\to g_0^2\mu^{4-D}$, $\gamma^\mu\gamma_\mu = D$, $Tr(\gamma_\mu\gamma_\nu) = g_{\mu\nu}2^{D/2}$

+ trükkök: $\int_0^1 dx(\dots)$ integrálás sorrendcsere + Wick-forgatás

$$\Rightarrow \Sigma(p) = -\frac{2C_F g_0^2\mu^{4-D}}{(2\pi)^{D/2}}\not p\,(-p^2)^{D/2-2}(D-1)\,B(D/2, D/2)\,\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)$$ $\frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)}{\Gamma(x_1+x_2)} = B(x_1,x_2)$

$$\epsilon = 2-\frac{D}{2}$$

Euler-áll 0,5..

$$\Sigma(p) = -\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}C_F\not p\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma+1-\ln\frac{-p^2}{4\pi\mu^2}\right)+O(\epsilon)$$

igazából $\Sigma(p) = \alpha\Sigma_{\text{Feynman}}(p)$ és $S(p) = \frac{1}{-\not p-\Sigma(p)}$ ha nulla a tömeg

Renormálás

$$S_R = \langle 0|T[\bar\psi^r\psi]|0\rangle = Z_2^{-1}S \text{ legyen } \Rightarrow \psi_r = Z_2^{-1/2}\psi$$

$$S_R = \frac{1}{1+Z_2+O(g_0^4)}S = \frac{1}{\not p}\frac{1}{1+\Sigma+Z_2+O(g_0^4)} \qquad \frac{1}{Z_2}\approx 1-Z_2+O(g_0^4)$$

ha $\Sigma+Z_2$ véges $\Rightarrow S_R$ is véges

MS (minimal substraction): $Z_2 = -\alpha\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}C_F\frac{1}{\epsilon}$

$\overline{MS}$: $Z_2 = -\alpha\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}C_F\left(\frac{1}{\epsilon}-\gamma+\ln 4\pi\right)$ amiért ne [illegible]

$$\Rightarrow S_R(p) = \frac{1}{\not p}\left(1+\alpha\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}C_F\left(-1+\ln\frac{-p^2}{\mu^2}\right)\right)^{-1}$$

Ez az ellentagos renormálás alapja.

Most nézzük az általános elméletet.

Fok-számolás

egy ⌒ tagnak ha van: $\int \frac{d^D k}{k^2 (p-k)} \sim \int dk\, k^{D-4}$ nagy k-ba

Def: felületi divergencia fokszáma, d = integrálok száma $\cdot D$ − propagátorok, vertexek (k hatvány)

pl  : $d = \underset{\text{2 hurok}}{2D} - \underset{\text{photon-prop}}{3\cdot 2} - \underset{\text{fermion-prop}}{2\cdot 1} + \underset{\text{vertexek}}{2\cdot 1} = 2D-6$

Áll: $d>0$: lehet divergens a gráf; $d<0$: lehet konvergens a gráf (na ezzel igen....)

Áll (Weinberg) Gráf véges, ha $\forall$ algráfjának is negatív a felületi divergencia fokszáma

Def: Vázgráf: ha kivesszük az eredetiből a divergens algráfokat

A gráf adatai:

- n_i: i. típusú vertexek száma
- l: független hurkok száma
- $n_{B,F}$; $N_{B,F}$: belső ill. külső, bozon ill. fermion vonalak száma
- n: vertexek száma

		b	f	δ
1.	vertex	3	0	1
2.	vertex	4	0	0
3.	vertex	3	0	1
4.	vertex	1	2	0
		bozonok	fermionok	független imp. számból csak a vertex miatt

triviális egyenlőségek:
$$2n_B + N_B = \sum_i n_i b_i$$
$$2n_F + N_F = \sum_i n_i f_i$$
$$\sum_{\text{vertexek}} \delta_v = \sum_i n_i \delta_i$$
$$\sum n_i = n$$

$$l = \frac{\sum_i (n_i b_i) - N_B}{2} + \frac{\sum_i (n_i f_i) - N_i}{2} - \sum_i n_i + 1 \Leftarrow l = n_B + n_F - (n-1)$$

definícióból: $d = lD - 2n_B - n_F + \sum_i n_i \delta_i \Rightarrow d = \sum_i n_i r_i - \frac{D-2}{2}N_B - \frac{D-1}{2}N_F + D$

ha $r_i = b_i \frac{D-2}{2} + f_i \frac{D-1}{2} + \delta_i - D$

itt $r_1 = r_3 = r_4 = \frac{D}{2} - 2$, $r_2 = 2D-4$

végül $d = (n+n_2)\underbrace{\left(\frac{D}{2}-2\right)}_{D\to 4:\ 0} - \frac{D-2}{2}N_B - \frac{D-1}{2}N_F + D$

és ha $D \le 4$: $d \le D - \frac{D-2}{2}N_B - \frac{D-1}{2}N_F$ és itt már csak külső tulajdonságok vannak, belsők nem, így pl a divergencia nem függ a perturbációszámítás rendjétől

N_B, N_F nagy $\Rightarrow d<0$ $\forall$ képp módosítás:? a definíciósan } $\frac{N_{AH}}{2}$-t le lehet vonni, mert ha ghost semmi ⇒ Σ ...

divergens ($d \geq 0$) gráfok tehát

	N_{GL}	N_{AH}	N_F	d
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	4
	2	$\emptyset$	$\emptyset$	2
	$\emptyset$	2	$\emptyset$	1
	$\emptyset$	$\emptyset$	2	1
	1	2	$\emptyset$	$\emptyset$
	1	$\emptyset$	2	$\emptyset$
	3	$\emptyset$	$\emptyset$	1
	4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

} ezeket kell kiszámolni csak és kész! ...

Ellentagok

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{kh} = \mathcal{L}_{r,0} + \mathcal{L}_{r,kh} + \mathcal{L}_{counterterms}$$

$$\psi = Z_2^{1/2}\psi_r \qquad A_\mu^a = Z_3^{1/2} A^a_{r\mu} \qquad \chi^a_{12} = \tilde{Z}_3^{1/2}\chi^a_{r12}$$

$$g = Z_g g_r \qquad m = Z_m m_r \qquad \alpha = Z_3^1 \alpha_r$$

$$\mathcal{L}_c = -(Z_3-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_{r\nu} - \partial_\nu A^a_{r\mu})(\partial^\mu A^{a\nu}_r - \partial^\nu A^{a\mu}_r) - \frac{1}{2\alpha_r}(\partial_\mu A^{a\mu}_r)^2\left(\frac{Z_3}{Z_3^1}-1\right)$$
$$+ (\tilde{Z}_3 - 1)\, i\, (\partial_\mu \chi^a_{1r})(\partial^\mu \chi^a_{2r}) + (Z_2-1)\bar{\psi}_r(i\partial\!\!\!/ - m_r)\psi_r -$$
$$- (Z_2 Z_m - 1)\bar{\psi}_r m \psi_r - Z_g Z_3^{3/2}(\partial_\mu A^a_{r\nu} - \partial_\nu A^a_{r\mu})A_r^{b\mu}A_r^{c\nu} -$$
$$- (Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2} - 1)(\text{ghost-gluon kh.}) + (Z_g Z_2 Z_3^{1/2} - 1)(\text{gl-gl}) - (Z_g^2 Z_3^2 - 1)(\text{4 gluon})$$

$\mathcal{L}_r$-ek pedig már végesek (ill: $n+1$. rend $\mathcal{L}_r$-ben, ezért n. rendű $\mathcal{L}_c$ ~~...~~ éppen kiejti a singularitásokat)

Slavnov-Taylor

ugye $Z[J, \ldots, \bar{\xi}] = \int [dA] \ldots [d\bar{\psi}]\, e^{i\int d^4x(\mathcal{L} + AJ + \ldots + \bar{\xi}\psi)}$ volt a gen. funkcionál

BRS trafó:

$$\delta A_\mu^a \to \delta\lambda\, D_\mu^{ab}\chi_2^b$$
$$\delta\psi \to ig\,\delta\lambda\, T^a \chi_2^a \psi$$
$$\delta\chi_1^a \to i\,\delta\lambda\,\frac{1}{\alpha}\partial^\mu A^a_\mu$$
$$\delta\chi_2^a \to -\frac{1}{2}\delta\lambda\, g f^{abc}\chi_2^b\chi_2^c$$

BRS trafó + mértékinvariancia

$\langle 0 | T(A^a_\mu(x) \dots) | 0 \rangle = \langle 0 | T(A'^a_\mu(x) \dots | 0 \rangle$

innen (különféle gráfokat megvizsgálva) Slavnov-Taylor összefüggések jönnek

$Z_1 = Z_g Z_3^{3/2}$ $\quad \tilde{Z}_1 = Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}$ $\quad Z_4 = Z_g^2 Z_3^2$ $\quad Z_g = Z_1 / Z_3^{3/2}$

$Z_{1F} = -Z_g Z_2 Z_3^{1/2}$ $\quad Z_\alpha = Z_3$ $\quad \frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1}$

és pl $\tilde{Z}_3 = 1 + \frac{g_r^2}{(4\pi)^2} C_G \frac{3-\alpha_r}{4} \frac{1}{\epsilon} + O(g_r^4)$

$\tilde{\Pi}^{as}(\xi) = \delta_{as} \xi^2 \left(-\frac{g_r^2}{(4\pi)^2} C_A \frac{3-\alpha_r}{4} \frac{1}{\epsilon} + \tilde{Z}_3 - 1 \right)$ + véges

ghost-~~saj~~ sajátenergia miatt.