# 8. Mértékelméletek

2004. június 14.

## 1. Konvenciók

Legyen $(M, \boldsymbol{\eta}, \mathbb{R})$ egy speciális relativisztikus téridőmodell. (Hogy ne kelljen a dimenziókkal bajlódni, minden legyen valós értékű.) Klasszikusan lehetne általánosabban sokaságokon vizsgálni, de szerintem most felesleges, mert kvantálni amúgyis csak affin téren lehet.

A különböző vektorterekben levő objektumok neve mellé, ahol szükséges, a jobb érthetőség kedvéért indexeket teszek. De ezek nem valami koordinátázásbeli indexek, és nem azt jelentik, hogy a kétszer előforduló indexekre összegezni kell. Csupán arra utal, hogy melyik mennyiseg melyik vektortérben van, es azt könnyíti meg leolvasni, hogy mi mivel hogyan van kontrahálva. A vektortérbeli indexek fölül, a kovektortérbeliek alul lesznek. A különböző vektorterekben különböző típusú indexet használok ($\mathbf{W}$ és $\mathbf{U}$ nem fog egyszerre előfordulni):

| | |
|---|---|
| $\mathbf{A}$-ban: | $a, b, c, d, e$ |
| $\mathbf{V}$-ben: | $p, q, r, s, t, u, v$ |
| $\mathbf{W}$-ben és $\mathbf{U}$-ban: | $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ |
| $\mathbf{M}$-ben: | $\mu, \nu, \kappa, \lambda$ |

Például ha azt írom: $\mathbf{F}^a{}_{\mu\nu}$, akkor abból az látszik, hogy $\mathbf{F}$ az $\mathbf{A} \otimes \mathbf{M}^* \otimes \mathbf{M}^*$-ban van. Ha ezt írom: $\mathbf{K}^a{}_{\mu\alpha}\mathbf{B}^{\alpha\beta}$, akkor ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{K} \otimes \mathbf{B}$-re van alkalmazva az $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{M}^*} \otimes \mathrm{Tr}_{\mathbf{W}^* \otimes \mathbf{W}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{W}}$.

Ha valóban egy adott bázisban kell valamit felírni, az összegző indexek mindig $i, j, k, l, m$ lesznek, és a szuma mindig ki lesz írva. Például ha $\mathbf{a}^b \in \mathbf{A}$, és $\mathbf{t}_i^b \in \mathbf{A}$ $(i = 1, \dots, \dim \mathbf{A})$ egy bázis, $a^i$ meg az $\mathbf{a}$ koordinátái ebben a bázisban, akkor $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{\dim \mathbf{A}} a^i \mathbf{t}_i$.

## 2. Klasszikus mértékelméletek

A klasszikus mezőelméleteket Lagrange-függvénnyel szoktuk leírni. Legyen $\mathbf{W}$ egy véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ fölött. A mezőelmélet Lagrange-függvénye egy

$$L\colon M \times \mathbf{W} \times \mathbf{W} \otimes \mathbf{M}^* \to \mathbb{R}$$

folytonosan differenciálható függvény. Az $M$ legyen a nulladik változója, a $\mathbf{W}$ az első és $\mathbf{W} \otimes \mathbf{M}^*$ a második. Keressük azon $\phi\colon M \to \mathbf{W}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényeket, amelyekre a

$$S[\phi] = \int\limits_M L(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\,\mathrm{d}\lambda_M$$

hatás stacionárius. (Itt lehetne szórakozni azzal, hogy nem az egész térre vesszük az integrált, hanem kompakt halmazokra, de szerintem itt most nem érdemes.) A deriválást $\partial$-lal jelölöm, a $D$ a kovariáns deriválásra van fönntartva. A megoldások pontosan az Euler–Lagrange-egyenlet megoldásai lesznek:

$$\partial_\nu \left[ \left( \partial_{2,\beta}{}^\nu L \right) (\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) \right] = (\partial_{1,\beta} L)\,(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi).$$

Ezt általában ebbe az alakba írják:

$$\partial_\nu \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\nu \phi^\beta\right)} = \frac{\partial L}{\partial \phi^\beta},$$

de itt akkor hozzá kell tenni, hogy a balodalon az első az valójában egy „totális parciális deriválás". Persze ez pontosan azt jelenti, ami a felette levő sorban van, hogy először parciálisad deriválni kell az $L$-et, utána behelyettesíteni a $\phi$-t, es utána újra deriválni az egészet. Legyen $L_\phi = L(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\colon M \to \mathbb{R}$.

$$\partial_\mu L_\phi = (\partial_{0,\mu} L)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) + (\partial_{1,\beta} L)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) \cdot \partial_\mu \phi^\beta + \left(\partial_{2,\beta}{}^\nu L\right)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) \cdot \partial_\mu \partial_\nu \phi^\beta =$$

ha $\phi$ kielégíti az Euler–Lagrange-egyenletet, akkor

$$\begin{aligned} &= (\partial_{0,\mu} L)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) + \partial_\nu \left[\left(\partial_{2,\beta}{}^\nu L\right)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\right] \cdot \partial_\mu \phi^\beta + \left(\partial_{2,\beta}{}^\nu L\right)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) \cdot \partial_\nu \partial_\mu \phi^\beta \\ &= (\partial_{0,\mu} L)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) + \partial_\nu \left[\left(\partial_{2,\beta}{}^\nu L\right)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) \cdot \partial_\mu \phi^\beta\right] \end{aligned}$$

Azaz

$$-(\partial_{0,\mu} L)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) = \partial_\nu \left[\left(\partial_{2,\beta}{}^\nu L\right)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) \cdot \partial_\mu \phi^\beta - \delta^\nu_\mu L(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\right] = \partial_\nu \left[\Theta^\nu{}_\mu(\phi)\right].$$

Itt $\Theta^\nu{}_\mu(\phi)$ a $\phi$ mezőkonfigurációhoz tartozó kanonikus energiaimpulzus tenzor. Ha tehát $\phi$ kielégíti az Euler–Lagrange-egyenletet, és $\partial_0 L = 0$ (azaz a Lagrenge-függvény a helytől explicit módon nem függ), akkor $\partial_\nu \left[\Theta^\nu{}_\mu(\phi)\right] = 0$. A szokásosabb felírásmód:

$$\Theta^\nu{}_\mu = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\nu \phi^\beta\right)} \partial_\mu \phi^\beta - \delta^\nu_\mu L$$

## 2.1. Globális belső szimmetria

Legyen $G$ egy $n$ dimenziós összefüggő Lie-csoport, és $\mathbf{A}$ legyen a Lie-algebrája. Legyen $R\colon G \to \mathrm{Lin}(\mathbf{W})$ egy sima ábrázolás. Legyen $r\colon \mathbf{A} \to \mathrm{Lin}(\mathbf{W})$ a Lie-algebrának az $R$-hez tartozó ábrázolása, azaz ha $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, akkor $R(e^{\mathbf{a}}) = e^{r(\mathbf{a})}$. (A baloldalon a Lie-algebra exponenciális van, a jobboldalon pedig a $\mathrm{Lin}(\mathbf{W})$-beli exponenciális.) $r$ egy lineáris leképezés, tehát $r \in \mathbf{W} \otimes \mathbf{W}^* \otimes \mathbf{A}^*$, és így ha $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, akkor $r(\mathbf{a})^\alpha{}_\beta = r^\alpha{}_{\beta b} \mathbf{a}^b$.

Azt mondjuk, hogy a Lagrange-függvény invariáns $(G, R)$-re, ha

$$L = L \circ (\mathrm{id}_M, R(g), R(g) \otimes id_{\mathbf{M}^*}) \qquad \forall g \in G.$$

A $\otimes$ id-eket nem fogom mindenhova kiírni, csak ahol különben zavaró lenne.

Mivel $G$ összefüggő, ezért az, hogy $L$ invariáns $(G, R)$-re egyenértékű azzal, hogy minden $g \in G$ pontban az $L \circ (\mathrm{id}_M, R(g), R(g) \otimes id_{\mathbf{M}^*})$-nek a $g$ szerinti deriváltja nulla. Ezt kicsit szebben a következőképpen lehet megfogalmazni.

Legyen $g \in G$ rögzített. A $g$-nek van olyan környezete, hogy abban a környezetben levő minden $g'$ elem egyértelműen írható fel $g' = g \cdot e^{\mathbf{a}}$ alakban, ahol $\mathbf{a}$ befutja a $\mathbf{0} \in \mathbf{A}$ egy környezetét. Tehát az, hogy $L$ invariáns $(G, R)$-re, a $g$ pontban így írható:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^b} L(\mathrm{id}_M, R(g'(\mathbf{a}))\phi, R(g'(\mathbf{a}))\partial\phi) = 0$$

Legyen $L$ invariáns $(G, R)$-re. Ekkor a következő levezetés végezhető:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^b} L(\mathrm{id}_M, R(g'(\mathbf{a}))\phi, R(g'(\mathbf{a}))\partial\phi) = \\ &= (\partial_{1,\alpha} L)(\mathrm{id}_M, R(g'(\mathbf{a}))\phi, R(g'(\mathbf{a}))\partial\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^b} \left(R(g)^\alpha{}_\beta (e^{r(\mathbf{a})})^\beta{}_\gamma \phi^\gamma\right) + \\ &+ \left(\partial_{2,\alpha}{}^\nu L\right)(\mathrm{id}_M, R(g'(\mathbf{a}))\phi, R(g'(\mathbf{a}))\partial\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}^b} \left(R(g)^\alpha{}_\beta (e^{r(\mathbf{a})})^\beta{}_\gamma \partial_\nu \phi^\gamma\right) = \end{aligned}$$

Ha $L$ invariáns $(G, R)$-re, akkor a parciális deriváltjai is, ezért azok hasába már nem kell kiírni a $g$ hatását.

$$= (\partial_{1,\alpha} L)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\, R(g)^\alpha{}_\beta (e^{r(\mathbf{a})})^\beta{}_\gamma r^\gamma{}_{\delta b} \phi^\delta + \left(\partial_{2,\alpha}{}^\nu L\right)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\, R(g)^\alpha{}_\beta (e^{r(\mathbf{a})})^\beta{}_\gamma r^\gamma{}_{\delta b} \partial_\nu \phi^\delta$$

Vehetjük azt a speciális esetet, hogy $g'$ a csoport egységeleme. Ekkor $R(g)^\alpha{}_\beta (e^{r(\mathbf{a})})^\beta{}_\gamma = \delta^\alpha_\gamma$.

$$0 = r^\alpha{}_{\beta b} \left[(\partial_{1,\alpha} L)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\, \phi^\beta + \left(\partial_{2,\alpha}{}^\nu L\right)(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\, \partial_\nu \phi^\beta\right] =$$

ha $\phi$ kielégíti az Euler–Lagrange-egyenletet

$$= \partial_\nu \left[ \left( \partial_{2,\alpha}{}^{\nu} L \right) (\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)\, r^{\alpha}{}_{\beta b} \phi^b \right] = \partial_\nu j_b^\nu$$

Itt $j\colon M \to \mathbf{A}^* \otimes \mathbf{M}$ a Noether-áram. Annyi lineárisan független van belőle, ahány dimenziós a Lie-algebra, azaz ahány dimenziós a szimmetriacsoport. Ha tehát $\phi$ kielégíti az E–L-egynletet, akkor van $n$ lineárisan független megmaradó áram. A levezetésből az is látszik, hogy ezen áramok megmaradása független attól, hogy az $L$ függ-e explicit módon a helytől (ellentétben az energiaimpulzus tenzorral).

Ezt a szokásosabb alakra a következőképpen hozhatjuk. Legyen $\mathbf{t}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ egy bázis $\mathbf{A}$-ban. Ekkor $(\mathbf{T}_i)^{\alpha}{}_{\beta} := \mathring{\imath}(r(\mathbf{t}_i))^{\alpha}{}_{\beta} = \mathring{\imath} r^{\alpha}{}_{\beta b} \mathbf{t}_i^b$. A szokásos elnevezés szerint az $i$-edik Noether-áram

$$j^{i,\nu} := \mathring{\imath} j_b^\nu \mathbf{t}_i^b = \left( \partial_{2,\alpha}{}^{\nu} L \right) (\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi) \,(\mathbf{T}_i)^{\alpha}{}_{\beta} \phi^\beta = \frac{\partial L}{\partial \left( \partial_\nu \phi^\alpha \right)} (\mathbf{T}_i)^{\alpha}{}_{\beta} \phi^\beta.$$

## 2.2. A Lie-algebra struktúraállandói

Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$, akkor a kommutátoruk megkapható

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^a = \mathbf{K}^{a}{}_{bc} \mathbf{a}^b \mathbf{b}^c,$$

ahol $\mathbf{K} \in \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A}^*$. Az antiszimmetria és a Jacobi-azonosság miatt

$$\mathbf{K}^{a}{}_{bc} = -\mathbf{K}^{a}{}_{cb}$$
$$\mathbf{K}^{a}{}_{bc} \mathbf{K}^{c}{}_{de} + \mathbf{K}^{a}{}_{dc} \mathbf{K}^{c}{}_{eb} + \mathbf{K}^{a}{}_{ec} \mathbf{K}^{c}{}_{bd} = 0.$$

Ha választunk $\mathbf{A}$-ban egy $\mathbf{t}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ bázist, akkor a struktúraállandókat másképpen is megkaphatjuk:

$$[\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j] = \sum_{k=1}^{n} C^{k}{}_{ij} \mathbf{t}_k, \qquad i, j = 1, \dots, n$$

Az antiszimmetria és a Jacobi-azonosság miatt

$$C^{k}{}_{ij} = -C^{k}{}_{ji} \qquad i, j, k = 1, \dots, n$$
$$\sum_{m=1}^{n} C^{l}{}_{im} C^{m}{}_{jk} + \sum_{m=1}^{n} C^{l}{}_{jm} C^{m}{}_{ki} + \sum_{m=1}^{n} C^{l}{}_{km} C^{m}{}_{ij} = 0, \qquad i, j, k, l = 1, \dots, n$$

Legyen $\mathbf{d}^i$ a duális bázis $\mathbf{A}^*$-ban, azaz $\mathbf{t}_i^b \mathbf{d}_b^k = \delta_i^k$ és $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{t}_i^b \mathbf{d}_c^i = \delta_c^b$. Ekkor $C$ és $\mathbf{K}$ között a kapcsolat a következő:

$$C^{k}{}_{ij} = \mathbf{K}^{a}{}_{bc} \mathbf{d}_a^k \mathbf{t}_i^b \mathbf{t}_j^c \qquad i, j, k = 1, \dots, n$$
$$\mathbf{K}^{a}{}_{bc} = \sum_{i,j,k} C^{k}{}_{ij} \mathbf{t}_k^a \mathbf{d}_b^i \mathbf{d}_c^j,$$

azaz $C$ pontosan a $\mathbf{K}$-nak a $\mathbf{t}_i$ bázisbeli koordinátázott alakja.

## 2.3. A globális szimmetria lokálissá tétele

Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{U}$ véges dimenziós vektorterek, $\mathbf{V}$ Hilbert-tér. $G$ egy kompakt egyszerű Lie-csoport, $R\colon G \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ differenciálható unitér ábrázolás, $r\colon \mathbf{A} \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})$ a hozzá tartozó Lie-algebra ábrázolás. Legyen $\mathcal{G} = \{\, M \to G \,\text{sima}\}$, a csoportművelet a pontonkénti szorzás. Ha $h \in \mathcal{G}$, akkor

$$\mathcal{R}(h)\colon \{M \to \mathbf{V} \otimes \mathbf{U} \text{ kétszer folytonosan diffható}\} \to \{M \to \mathbf{V} \otimes \mathbf{U} \text{ kétszer folytonosan diffható}\}$$

és

$$\left( \mathcal{R}(h)\phi \right)(x) := R(h(x))\phi(x).$$

Ha ${\mathbf{a}^b}_\mu \colon M \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{M}^*$ egy Lie-algebra értékű kovektormező, akkor legyen $\tilde{r}(\mathbf{a}) = (r \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{M}^*})\,\mathbf{a}$. A hullámot a továbbiakban nem írom ki.

Legyen az $L\colon M \times \mathbf{V} \otimes \mathbf{U} \times \mathbf{V} \otimes \mathbf{U} \otimes \mathbf{M}^* \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvény globálisan invariáns $(G, R)$-re, azaz

$$L = L \circ (\mathrm{id}_M, R(g) \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{U}}, R(g) \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{U}} \otimes \mathrm{id}_{\mathbf{M}^*}) \qquad \forall g \in G,$$

másképp

$$L_\phi = L_{R(g)\phi} \qquad \forall g \in G.$$

Azt akarjuk elérni, hogy lokálisan is invariáns legyen, azaz invariáns legyen a $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$-re is, azaz

$$L_\phi = L_{\mathcal{R}(h)\phi} \qquad \forall h \in \mathcal{G}$$

is teljesüljön.

$$L_{\mathcal{R}(h)\phi}(x) = L\left(x, {R(h(x))^p}_q \phi^{q\alpha}(x), \partial_\mu \left({R(h(x))^p}_q \phi^{q\alpha}(x)\right)\right).$$

$$\partial_\mu \left({R(h)^p}_q \phi^{q\alpha}\right) = \partial_\mu \left({R(h)^p}_q\right) \cdot \phi^{q\alpha} + {R(h)^p}_q \cdot \partial_\mu \phi^{q\alpha},$$

úgyhogy az első taggal csinálni kell valamit. Vegyünk egy ${\mathbf{a}^b}_\mu \colon M \to \mathbf{A} \otimes \mathbf{M}^*$ sima mezőt, és egy $g$ csatolási állandót. Ennek segítségével definiáljuk a kovariáns deriválást így:

$$D_{\mathbf{a},}{^p}_{q\mu} \phi^{q\alpha} := \partial_\mu \phi^{p\alpha} + g \cdot {r(\mathbf{a}_\mu)^p}_q \phi^{q\alpha} = \left(\partial_\mu \delta^p_q + g \cdot {r(\mathbf{a}_\mu)^p}_q\right) \phi^{q\alpha}$$

Szokásosabb azonban $\mathbf{a}$ helyett koordinátákkal dolgozni.

$${r(\mathbf{a}_\mu)^p}_q = -\mathring{\imath} \sum_{i=1}^n A^i_\mu {{\mathbf{T}_i}^p}_q,$$

ahol

$$A^i_\mu \colon M \to \mathbf{M}^* \qquad i = 1, \dots, n \qquad n \text{ db kovektormező.}$$

Ekkor a kovariáns deriválás így írható:

$$D_{A,}{^p}_{q\mu} \phi^{q\alpha} = \partial_\mu \phi^{p\alpha} - \mathring{\imath} g \sum_{i=1}^n A^i_\mu {{\mathbf{T}_i}^p}_q \phi^{q\alpha},$$

indexek nélkül

$$D_{A,\mu}\phi = \left(\partial_\mu - \mathring{\imath} g \sum_{i=1}^n A^i_\mu \mathbf{T}_i\right) \phi.$$

Itt a $\mathbf{T}_i$ a „hermitikus generátorok”:

$$[\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j] = \mathring{\imath} \sum_k {C^k}_{ij} \mathbf{T}_k$$

Egy $h \in \mathcal{G}$ hasson az $\mathbf{a}$-n így:

$$(\mathcal{R}(h)\mathbf{a})(x) := \mathrm{Ad}(h(x))\,\mathbf{a}(x) - \frac{1}{g} \mathrm{Ad}\left((h^{-1}(x))\right)_* \partial_\mu h(x).$$

Az első tagban Ad az adjungált ábrázolást jelenti, a második tagban pedig a kanonikus csoporthatást. Az $\mathbf{A}$-t most úgy kepzeltük el, mint a $G$-nek az $e$-beli érintőtere. Így a második tagban a $h$ deriváltját visszahúztuk a kanonikus csoporthatás szerint az $e$-beli érintőtérbe. (Ezt valószínűleg nem kell tudni.) Az a lényeg, hogy az $R$ ábrázolást ráengedve ez hogyan néz ki:

$$r\left[(\mathcal{R}(h)\mathbf{a}_\mu)(x)\right] = R(h(x))\, r(\mathbf{a}_\mu(x))\, R(h(x))^\dagger - \frac{1}{g} \left(\partial_\mu R(h(x))\right) R(h(x))^\dagger,$$

azaz a koordinátás alakban

$$\sum_i {A'^i}_\mu(x) \mathbf{T}_i = R(h(x)) \left(\sum_i A^i_\mu \mathbf{T}_i\right) R(h(x))^\dagger - \frac{\mathring{\imath}}{g} \left(\partial_\mu R(h(x))\right) R(h(x))^\dagger.$$

Ekkor a kovariáns derivált így transzformálódik:

$$D_{\mathbf{a}',\mu}\phi' = \partial_\mu\left(R(h)\,\phi\right) + g\left[R(h)\,r(\mathbf{a}_\mu)\,R(h)^\dagger - \frac{1}{g}\left(\partial_\mu R(h)\right)R(h)^\dagger\right]R(h)\,\phi = R(h)\left[\partial_\mu\phi + g\,r(\mathbf{a}_\mu)\phi\right]$$

Ha $L_{\mathbf{a},\phi}(x) = L\left(x, \phi(x), (D_{\mathbf{a},\mu}\phi)(x)\right)$, akkor tehát

$$L_{\mathbf{a},\phi}(x) = L_{\mathbf{a}',\phi'}(x),$$

azaz ez a Lagrange-függvény már invariáns a lokális mértéktranszformációkra is.

Már csak az $\mathbf{a}$ mértékmezőnek kell dinamika. Legyen $\mathbf{f}\colon M \to \mathbf{A}\otimes\mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}^*$, $\mathbf{f}^b{}_{\mu\nu} := \partial_\mu\mathbf{a}^b{}_\nu - \partial_\nu\mathbf{a}^b{}_\mu + g\left[\mathbf{a}_\mu, \mathbf{a}_\nu\right]^b$, a térerősségtenzor. Erre az ábrázolást ráengedve legyen $\mathbf{F}\colon M \to \mathrm{Lin}(\mathbf{V})\otimes\mathbf{M}^*\otimes\mathbf{M}^*$, $\mathbf{F} := \mathring{\imath}\left(r\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{M}^*}\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{M}^*}\right)\mathbf{f}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\mu\nu} &= \frac{\mathring{\imath}}{g}\left[D_{\mathbf{a},\mu}, D_{\mathbf{a},\nu}\right] = \frac{\mathring{\imath}}{g}\left[\partial_\mu + g\,r(\mathbf{a}_\mu), \partial_\nu + g\,r(\mathbf{a}_\nu)\right] = \\
&= \mathring{\imath}\partial_\mu r(\mathbf{a}_\nu) - \mathring{\imath}\partial_\nu r(\mathbf{a}_\mu) + \mathring{\imath}g\left[r(\mathbf{a}_\mu), r(\mathbf{a}_\nu)\right] = \\
&= \partial_\mu\sum_{i=1}^n A^i_\nu\mathbf{T}_i - \partial_\nu\sum_{i=1}^n A^i_\mu\mathbf{T}_i + g\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j,k} C^i{}_{kj}A^k_\mu A^j_\nu\right)\mathbf{T}_i.
\end{aligned}$$

Legyen $F^i_{\mu\nu}$ $(i = 1,\ldots,n)$ az $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ koordinátái:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n F^i_{\mu\nu}\mathbf{T}_i.$$

Ekkor az térerősségtenzor koordinátás alakja:

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\sum_{j,k} C^i{}_{kj}A^k_\mu A^j_\nu.$$

Mértéktranszformációk során a térerősségtenzor így transzformálódik:

$$\mathbf{F}'_{\mu\nu} = R(h)\,\mathbf{F}_{\mu\nu}\,R(h)^\dagger$$

A mértékmezőnek a dinamikáját adó Lagrange-függvény legyen

$$L_{\mathbf{a}} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}K(\mathbf{f}_{\mu\nu}, \mathbf{f}_{\kappa\lambda}).$$

Itt $K\colon \mathbf{A}\times\mathbf{A}\to\mathbf{A}$, $K(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}(\mathbf{a})\circ\mathrm{ad}(\mathbf{b})\right)$ az $\mathbf{A}$ Cartan–Killing-formája, ad pedig az adjungált ábrázolása $\mathbf{A}$-nak. A Cartan–Killing-forma ellentettje szolgáltat egy skalárszorzatot a Lie-algebrán. Ezzel ortogonális, és megfelelően normált bázist választhatunk $\mathbf{A}$-n. Ebben a koordinátázásban a hatás koordinátás alakban:

$$L_{\mathbf{a}} = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$$

Tehát az eredeti

$$L_\phi = L(\mathrm{id}_M, \phi, \partial\phi)$$

Lagrange-függvény helyett most már a

$$L_{\phi,A} = L(\mathrm{id}_M, \phi, D_A\phi) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}$$

Lagrange-függvényünk van. Ez már lokálisan mértékinvariáns, és a mértékmezők dinamikáját is tartalmazza.

Ha a $G$ csoport nem egyszerű, hanem egyszerű csoportok direkt szorzata $G = G_1\times\cdots\times G_k$, akkor a Lie-algebrája a megfelelő csoportok Lie-algebrájának direkt összege lesz $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{A}_k$. Ekkor minden egyes egyszerű komponenshez külön csatolási állandó rendelhető, tehát ekkor $k$ darab független $g_1,\ldots,g_k$ csatolási állandót kell bevezetni. (Például gyenge kcsh.: $G = SU(2)\times U(1) \longrightarrow g, g'$.)

## 2.4. Példák

### 2.4.1. Skalár elektrodinamika

Itt $\phi\colon M \to \mathbb{C}$, azaz $\mathbf{V} = \mathbb{C}$ és $\mathbf{U} = \mathbb{C}$. Az eredeti Lagrange-függvény:

$$L_\phi = (\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2\, \phi^* \phi$$

Ennek van egy globális $U(1)$ szimmetriája, az önábrázolásban: $\phi' = e^{\mathring{\imath}\alpha}\phi$. Ennek megfelelően a hermitikus generátor az 1. A megmaradó Noether-áram

$$j^\mu = -\mathring{\imath} e \left( \partial^\mu \phi^* \cdot \phi - \phi^* \cdot \partial^\mu \phi \right).$$

A kovariáns deriválás

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathring{\imath} e A_\mu,$$

a térerősségtenzor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Így a teljes Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L_{\phi,A} &= (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2\, \phi^* \phi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \\ &= (\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2\, \phi^* \phi + A_\mu j^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu). \end{aligned}$$

### 2.4.2. Elektrodinamika

Itt $\psi\colon M \to \mathbb{C}^4$, $\mathbf{V} = \mathbb{C}$ és $\mathbf{U} = \mathbb{C}^4$. Az eredeti Lagrange-függvény

$$L_\psi = \bar{\psi}(\mathring{\imath}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Ennek is ugyanúgy globális $U(1)$ szimmetriája van az önábrázolásban. A Noether-áram

$$j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi.$$

A kovariáns deriválás és a térerősség ugyanaz, mint skalár esetben. A mértékinvariáns Lagrange-függvény

$$L_{\psi,A} = \bar{\psi}(\mathring{\imath}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu).$$

### 2.4.3. QCD

A QCD esetében $G = SU(3)$, méghozzá a színben, azaz $\mathbf{V} = \mathbb{C}^{3(\text{szín})}$. $\mathbf{U} = \mathbb{C}^{4(\text{spin})\cdot 6(\text{íz})}$, így $\psi\colon M \to \mathbb{C}^{3(\text{szín})\cdot 4(\text{spin})\cdot 6(\text{íz})}$. Az eredeti Lagrange-függvény

$$L_\psi = \bar{\psi}(\mathring{\imath}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Az $m$ színben és spinben az identitás, az ízben pedig pozitív definit önadjungált (azaz a tömegeket tartalmazza sajátértékként). A megmaradó Noether-áram

$$j^{i,\mu} = g\,\bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\lambda^i}{2}\psi,$$

ahol $\lambda^i$ a Gell–Mann-mátrixok, és a szín indexekben hatnak.

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} & -\mathring{\imath} & \\ \mathring{\imath} & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} & & -\mathring{\imath} \\ & & \\ \mathring{\imath} & & \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} & & \\ & & -\mathring{\imath} \\ & \mathring{\imath} & \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$

A kovariáns deriválás

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathring{\imath} g \sum_{i=1}^{8} \frac{\lambda^i}{2} A^i_\mu,$$

a térerősség

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - \mathring{\imath} g \sum_{j,k} f^{ijk} A^j_\mu A^k_\nu,$$

ahol $f^{ijk}$ az $SU(3)$ struktúraállandói. A teljes Lagrange-függvény így

$$L_{\psi,A} = \bar{\psi}(\mathring{\imath}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \sum_{i=1}^{8} j^{i,\mu} A^i_\mu - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8} (\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)(\partial^\mu A^{i,\nu} - \partial^\nu A^{i,\mu})$$
$$-g \sum_{i,j,k} f^{ijk} \left(\partial_\mu A^i_\nu\right) A^{j,\mu} A^{k,\nu} - \frac{g^2}{4} \sum_{i,j,k,l,m} f^{ijk} f^{ilm} A^j_\mu A^k_\nu A^{l,\mu} A^{m,\nu}.$$

# 3. Mértékelméletek kvantálása

(Ez az a rész, amit „nem teljesen értek".)

Először nézzük tiszta mértékelméletre. $Z[J]$ a generátorfunkcionál. Ekkor a propagátorok a következőképpen számolhatók.

$$\langle 0 | \mathrm{T}\left(A^{a_1}_{\mu_1}(x_1) \dots A^{a_n}_{\mu_n}(x_n)\right) | 0 \rangle = \frac{(-\mathring{\imath})^n}{Z[0]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J^{a_1}_{\mu_1}(x_1) \dots \delta J^{a_n}_{\mu_n}(x_n)} \right|_{J=0} \tag{1}$$

A generátorfunkcionál tiszta mértékelméletre naívul

$$Z[J] = \int [\mathrm{d}A] \exp\left[\mathring{\imath} \int \mathrm{d}^4 x \left(L + A^a_\mu J^{a,\mu}\right)\right].$$

$L$ és $[\mathrm{d}A] = \prod_{\mu,a} \left[\mathrm{d}A^a_\mu\right]$ mértékinvariáns, $A^a_\mu J^{a,\mu}$ azonban nem, így a propagátorok nem lesznek mértékinvariánsak. Az összes konfigurációra integrálva egy felesleges végtelen szorzófaktor jön be. A $[\mathrm{d}A]$ „mérték" mértékinvariáns, ezért elegendő a $\mathcal{G}$ minden orbitjából egy elemet kiválasztani, és úgy végrehajtani az ingerált. (Magyarul az orbitokra kell integrálni.) Az $A^a_\mu(x)$-nek a $\theta$ paraméterekkel vett mértéktranszformáltja legyen $A^{(\theta)a}_\mu$. A mértékrögzítő feltétel legyen

$$G^\mu A^{(\theta)a}_\mu(x) = B^a(x),$$

ahol $G^\mu$ és $B^a$ adottak. Erről fel kell tennünk, hogy minden orbitból pontosan egy reprezentánst választ ki. Ez kis terek esetében általában igaz, nagy terek esetére általában több megoldás is van: Gribov ambiguity. A Feynman szabályok definiálásához azonban elég, mivel a perturbációszámítás úgyis gyenge mező közelítésben működik.

$\Delta_G[A]$-t definiáljuk úgy, hogy

$$\Delta_G[A] \prod_{a,x} \int [\mathrm{d}g]\, \delta\left(G^\mu A^{(\theta)a}_\mu(x) - B^a(x)\right) = 1$$

legyen, ahol $[\mathrm{d}g] = \prod_a [\mathrm{d}\theta^a]$ a $\mathcal{G}$ csoportra vett funkcionálintegrál. Ezeket beírva

$$Z[0] = \int \left[\mathrm{d}A^{\theta_0}\right] \Delta_G\left[A^{\theta_0}\right] e^{\mathring{\imath} S(A^{\theta_0})} \prod_{a,x} \int [\mathrm{d}g]\, \delta\left(G^\mu A^a_\mu(x) - B^a(x)\right).$$

A produktum utáni rész nem függ $\theta$-tól. A $\prod_{a,x} \int [\mathrm{d}g]$ elvégezhető, de végtelennel egyenlő. A Faddeev–Popov recept az, hogy ezt az integrált egyszerűen elhagyjuk.

$$Z[0] = \int [\mathrm{d}A]\, \Delta_G[A]\, e^{\mathring{\imath} S(A)} \delta\left(G^\mu A^a_\mu(x) - B^a(x)\right)$$

Ha

$$M_G(x,y)^{ab} = \frac{\delta G^\mu A^{(\theta)a}_\mu(x)}{\delta \theta^b(y)}$$

akkor

$$\Delta_G[A] = \frac{1}{\int [\mathrm{d}g]\, \delta\left(G^\mu A^a_\mu(x) - B^a(x)\right)} = \det M_G.$$

$Z$-t egy konstanssal nyugodtan beszorozhatjuk, attól semmi nem változik. Ezért megszorozzuk

$$\int [\mathrm{d}B]\, \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2\alpha}\int \mathrm{d}x\, \left(B^a(x)\right)^2\right] \text{-tel,}$$

és ekkor kapjuk, hogy

$$Z[J] = \int [\mathrm{d}A]\, \det M_G\, \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \left(L - \frac{1}{2\alpha}\left(G^\mu A^a_\mu\right)^2 + A^a_\mu J^{a,\mu}\right)\right].$$

Itt $-\frac{1}{2\alpha}\left(G^\mu A^a_\mu\right)^2$ a mértékrögzítő tag.

Colulomb-mérték:

$$\frac{1}{g}G^\mu = (0, \nabla)$$

és ekkor

$$M_G(x,y)^{ab} = \left(\delta^{ab}\nabla^2 - g f^{abc}\nabla A^c_\mu\right)\delta^4(x-y).$$

Lorentz mérték (kovariáns mérték):

$$\frac{1}{g}G^\mu = \partial^\mu$$

és ekkor

$$M_G(x,y)^{ab} = -\left(\delta^{ab}\Box - g f^{abc}\partial^\mu A^c_\mu\right)\delta^4(x-y).$$

A Lorentz mértéket fogjuk használni. Már csak a $\det M_G$-vel kell valamit csinalni. Ha $\psi$ és $\bar{\psi}$ Grassmann-változók, akkor igaz, hogy

$$\int [\mathrm{d}\psi]\, \left[\mathrm{d}\bar{\psi}\right] \exp\left[\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \bar{\psi}(x) A(x,y)\psi(y)\right] = \det A.$$

Ezért

$$\begin{aligned}\det M_G &= \int [\mathrm{d}\chi]\,[\mathrm{d}\chi^*]\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\chi^{*a}(x) M_G(x,y)^{ab}\chi^b(y)\right] = \\ &= \int [\mathrm{d}\chi]\,[\mathrm{d}\chi^*]\exp\left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\chi^{*a}(x)\left(\delta^{ab}\Box - g f^{abc}\partial^\mu A^c_\mu\right)\delta^4(x-y)\chi^b(y)\right] = \\ &= \int [\mathrm{d}\chi]\,[\mathrm{d}\chi^*]\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \left(\partial^\mu\chi^{*a}(x)\right)\left(\delta^{ab}\partial_\mu - g f^{abc}A^c_\mu\right)\chi^b(x)\right] = \\ &= \int [\mathrm{d}\chi]\,[\mathrm{d}\chi^*]\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \left(\partial^\mu\chi^{*a}(x)\right) D^{ab}_\mu\chi^b(x)\right].\end{aligned}$$

A $\chi^a$ és $\chi^{*a}$ lesznek a ghost-terek. Mivel eleve a determináns reprezentációjára vezettük be ezeket, nem tartoznak hozzájuk aszimptotikus részecskék, szerepük csupán annyi, hogy a determináns perturbációs sorba fejtését lehetővé tegyék. A Poincaré csoport alatt egyébként skalárként viselkednek, ami gondot is okozna, ha fizikai mezőként kellene értelmezni ezeket a ghost mezőket, mert amúgy meg Grassmann-változók. Mivel nem tartoznak hozzájuk aszimptotikus állapotok, ezért a perturbációs kifejtésben a szellem mezők csak belső vonalakként jelentkezhetnek, és könnyen látható, hogy csak hurkokban tudnak járulékot adni. A $D^{ab}_\mu$ a ghost-terek kovariáns deriválása. Ebben nem az eredeti $R$ ábrázolásbeli generátorok szerepelnek, hanem az $R$-hez adjungált ábrázolásbeli generátorok.

A teljes generátorfunkcionál tehát a következő alakra hozható.

$$Z[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] = \int [\mathrm{d}A]\,[\mathrm{d}\chi]\,[\mathrm{d}\chi^*]\,[\mathrm{d}\psi]\,\left[\mathrm{d}\bar{\psi}\right]\,\exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\left(L + A^a_\mu J^{a,\mu} + \chi^{*a}\xi^a + \xi^{*a}\chi^a + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi\right)\right]$$

Itt $\xi$, $\xi^*$, $\eta$ és $\bar{\eta}$ Grassmann változók. A $\xi$ a $\chi$ szellemtereknek a forrása, az $\eta$ a fermionterek forrása. Az $L$ Lagrange-függvény pedig a következő tagokat tartalmazza:

$$\begin{aligned} L &= L_G + L_{GF} + L_{FP} + L_F \\ L_G &= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} && \text{a gauge-tér dinamikája} \\ L_{GF} &= -\frac{1}{2\alpha}\left(\partial^\mu A^a_\mu\right)^2 && \text{gauge fixing} \\ L_{FP} &= \left(\partial^\mu \chi^{*a}\right) D^{ab}_\mu \chi^b && \text{Faddeev-Popov} \\ L_F &= \bar{\psi}\left(\mathring{\imath}\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi && \text{fermionok} \end{aligned}$$

Ebből lehet leolvasni, hogy milyen vertexek vannak a perturbációs sorban.

Legyen $L_0$ a csak kvadratikus tagokat tartalmazó, szabad Lagrange-függvény (amely $g = 0$ esetén van):

$$\begin{aligned} L_0 &= L^G_0 + L^{FP}_0 + L^F_0 \\ L^G_0 &= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a,\nu} - \partial^\nu A^{a,\mu}) \\ L^{FP}_0 &= \left(\partial^\mu \chi^{*a}\right) \partial_\mu \chi^a \\ L^F_0 &= \bar{\psi}\left(\mathring{\imath}\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi \end{aligned}$$

A kölcsönhatási Lagrange függvény a többi.

$$L_{kh} = L - L_0$$

A szabad generátorfunkcionál

$$\begin{aligned} Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] &= Z^G_0[J]\cdot Z^{FP}_0[\xi,\xi^*]\cdot Z^F_0[\eta,\bar{\eta}] = \\ &= \int [\mathrm{d}A]\,[\mathrm{d}\chi]\,[\mathrm{d}\chi^*]\,[\mathrm{d}\psi]\,\left[\mathrm{d}\bar{\psi}\right]\,\exp\left[\mathring{\imath}\int \mathrm{d}^4x\,\left(L_0 + A^a_\mu J^{a,\mu} + \chi^{*a}\xi^a + \xi^{*a}\chi^a + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi\right)\right]. \end{aligned}$$

Ennek segítségével a teljes generátorfunkcionál

$$\begin{aligned} Z[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] &= \exp\left[\mathring{\imath}\int \mathrm{d}^4x\, L_{kh}\left(\frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta J^{a,\mu}}, \frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta\xi^{*a}}, \frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta(-\xi^a)}, \frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta\bar{\eta}}, \frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta(-\eta)}\right)\right] Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] = \\ &= \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathring{\imath}^n}{n!}\left[\int \mathrm{d}^4x\, L_{kh}\left(\frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta J^{a,\mu}}, \frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta\xi^{*a}}, \frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta(-\xi^a)}, \frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta\bar{\eta}}, \frac{\delta}{\mathring{\imath}\delta(-\eta)}\right)\right]\right\} Z_0[J,\xi,\xi^*,\eta,\bar{\eta}] \qquad (2) \end{aligned}$$

A perturbációs sort $N$-edik rendig úgy kapjuk meg, hogy a szummában $N$-ig megyünk el. Egy propagátort $N$-edrendig sorfejtve úgy kapunk meg, hogy az (1) kifejezésbe a (2) kepletben levő cuccost írjuk be, és a szummát $N$-edik tagig írjuk ki.