7. Térelméleti S-mátrix, funkcionálintegrálok, Feynman-gráfok

Lukács Árpád

2004. június 14.

1. Szórásjelenségek leírása. In és out-állapotok

A részecskefizikában leggyakrabban vizsgált kísérlettípus: a végtelenből bejönnek részecskék adott impulzussal, összeütköznek, majd a reakciótermékek kirepülnek, és kellő távolságban detektáljuk őket. Az alapfeltételezésünk az lesz, hogy a kölcsönhatások csak az ütközés (véges ideje) alatt jelentősek, az in- és out-állapotokban elhanyagolhatók.

(Ez rövid hatótávolságú kölcsönhatások esetén hihető is; általánosságban az adiabatikus bekapcsolással vesszük figyelembe.)

Az in- és out állapotok jelölése: Ψ_α^+ (in, $t\to-\infty$), illetve Ψ_α^- (out, $t\to\infty$). Perturbatív tárgyalás:

$$H = H_0 + H_1, \tag{1}$$

és az in- és out-állapotokról feltételezzük, hogy a kölcsönható Hamilton-operátor sajátvektorai:

$$H|p_1,\sigma_1,m_1;p_2,\sigma_2,m_2;\dots\rangle = (\sum_i p_{i0})|p_1,\sigma_1,m_1;p_2,\sigma_2,m_2;\dots\rangle. \tag{2}$$

További feltételezés (egyesek szerint tétel:-), hogy ezek teljes ortonormált rendszert alkotnak. Vezessük be a szabad többrészecskeállapotokat is (α „multiindex", jelöli a részecsketípusokat, impulzusokat, spinállapotokat,...)

$$H_0\Phi_\alpha = E_{0\alpha}\Phi_\alpha H\Psi^\pm{}_\alpha \quad = E_\alpha\Psi^\pm{}_\alpha \tag{3}$$

Mivel a kölcsönhatás csak az ütközés során jelentős, ezek az állapotok a kölcsönhatás előtt (illetve után) aszimptotikusan egyenlőek a szabadrészecske-állapotokkal:

$$e^{-iHt}\psi^\pm{}_\alpha \sim e^{-iH_0t}\Psi^\pm{}_\alpha \quad (t\to\pm\infty) \tag{4}$$

Bevezetve a következő operátort:

$$\Omega(t) := e^{iHt}e^{-iH_0t} \tag{5}$$

az előző összefüggések az alábbi alakba írhatók:

$$\Psi^\pm{}_\alpha = \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha, \tag{6}$$

és így (unitér trafó!):

$$(\Psi^{\pm}{}_{\alpha}, \Psi^{\pm}{}_{\beta}) = (\Phi_{\alpha}, \Phi_{\beta}) = \delta(\beta - \alpha). \tag{7}$$

Bevezethetjük a szórásmátrixot, mint az in- és out-állapotok közötti transzformáció mátrixát:

$$S_{\beta\alpha} = (\Psi^{-}{}_{\beta}, \Psi^{+}{}_{\alpha}), \tag{8}$$

ami ekkor Ω-val kifejezhető:

$$S = \Omega(+\infty)\Omega(-\infty), \tag{9}$$

ahonnan rögtön leolvasható, hogy a szórásmátrix unitér:

$$\sum_{\beta} S^{*}_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} = \delta_{\gamma\alpha}. \tag{10}$$

Az S-mátrix Poincaré-invarianciája: mivel a szabadrészecske-bázisban van felírva, a megfelelő generátorokkal írható fel:

$$U_0(\Lambda, a) S U^{\dagger}(\Lambda, a) = S \tag{11}$$

2. Klaszter-elv

Térszerűen szeparált kísérletek nem befolyásolhatják egymást. A következőkben ennek az S-mátrixra vonatkozó következményeit vizsgáljuk:

Az S-mátrix előállítása az összefüggő S-mátrix segítségével:

$$S_{\alpha\beta} = \sum \pm S^{C}_{\alpha_1,\beta_1} S^{C}_{\alpha_2,\beta_2}, \tag{12}$$

Ahol az összegzés az α és β-ban szereplő részecskék összes lehetséges részekre bontására megy.

Egy részecske nem tud szórásban részt venni:

$$S_{qq'} = \delta(q - q').$$

Ezek segítségével már felírható a teljes S-mátrix az összefüggő S-mátrixszal.

A klaszter-elv pontos megfogalmazása ezek után: ha az S-mátrixot egy Fourier-transzformációval térben lokalizált részecskékkel írjuk fel, és α és β tartalmaz térszerűen szeparált részecskéket, akkor

$$S^{C}_{\beta\alpha} = 0. \tag{13}$$

Az

$$U(\tau, \tau_0) = e^{iH_0\tau} e^{-iH(\tau-\tau_0)} e^{-iH_0\tau}$$

formulát lederiváljuk τ szerint: kapunk egy differenciálegyenletet $U(\tau, \tau_0)$-ra. A megoldás hatványsor alakjában: időrendezett exponenciális. Az eredmény $S = U(+\infty, -\infty)$-re:

$$S = T \exp\left(-i \int H_1(t) dt\right) = 1 + \sum_{n} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-infty}^{\infty} dt_1 \ldots \int_{-infty}^{\infty} dt_n T(H_1(t_1) \ldots H_1(t_n)), \tag{14}$$

ahol $H_1(t)$ a kölcsönhatási Hamilton kölcsönhatási képbeli alakja:

$$H_1(t) = e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t}. \tag{15}$$

A szórásmátrix Poincaré-invarianciájához szükséges a kölcsönhatási energia mikrokauzalitását:

$$[H_1(x), H_1(x')] = 0, \tag{16}$$

ha x és x' térszerűen szeparáltak.

3. Hatáskeresztmetszet számítása az S-mátrixból

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP(\alpha \to \beta)}{d\beta} \frac{d\beta}{d\Omega}$$

A nehézség az átmeneti valószínűség meghatározásánál van: ide naivan a megfelelő S-mátrixelem abszolútértéke írandó, azonban ekkor fellépne egy δ^2, amit nem tudunk értelmezni.

Ezért először véges térfogati integrálokra térünk át, majd az S-mátrixból leválasztjuk az egyenesen továbbhaladó részecskékhez tartozó részt, valamint az energia és impulzusmegmaradást biztosító Dirac-deltát:

$$S_{\beta\alpha} = I - 2\pi i \delta^3(p_\beta - p_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha) M_{\beta\alpha}, \tag{17}$$

így

$$dP(\alpha \to \beta) = \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2 d\beta, \tag{18}$$

illetve az előzőt ebbe beírva, a véges térfogati delták egyike helyett beírva a megfelelő, a deltát előállító integrál 0-beli értékét:

$$dP(\alpha \to \beta) = (2\pi)^2 \left(\frac{(2\pi)^3}{V}\right)^{N_\alpha} \frac{T}{2\pi} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta_V(p_\beta - p_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha) d\beta, \tag{19}$$

Ebbe már visszaírható a négyesdelta.

Alkalmazások: bomlási valószínűség

$$d\Gamma(\alpha \to \beta) = 2\pi |M_{\alpha\beta}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \tag{20}$$

(Itt az adódó nehézség: bomló részecske esetén nehéz az in-állapotot értelmezni.)

Hatáskeresztmetszet kétrészecske-szórásnál: Itt $d\Gamma \sim \frac{1}{V}$, a fluxus: $\Phi_\alpha = \frac{u_\alpha}{V}$, ezekkel a hatáskeresztmetszet:

$$d\sigma(\alpha \to \beta) = \frac{dP(\alpha \to \beta)}{\Phi_\alpha} = \frac{(2\pi)^4}{u_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \tag{21}$$

megmutatható, hogy a relatív sebesség"

$$u_\alpha = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2},$$

illetve tömegközépponti koordinátarendszerben

$$u_\alpha = \left| \frac{p_1}{E_1} - \frac{p_2}{E_2}. \right|$$

4. A Wick-tétel és a Feynman-diagrammok

A Wick-tétel arra vonatkozik, hogy az S-mátrix

$$S = T \exp\left(-i\int H_1(t)dt\right)$$

képletét hogyan alakíthatjuk át normálrendezett tagok összegére. Ehhez először is:

$$\langle f|S|i\rangle = \langle 0|\prod a_f T \exp\left(-i\int H_1(t)dt\right)\prod a^\dagger{}_i|0\rangle,$$

azaz a kezdeti és a végállapotokat felírjuk a keltő-eltüntető operátorok segítségével. Ha itt az exponenciálist sorbafejtjük, majd az egyes sorfejtési tagokban az időrendezett szorzatokat (kommutálással) normálrendezettekké alakítjuk, akkor a normálszorzatok járuléka 0 lesz, és csak a kommutátorokból adódó tagok maradnak.

A Wick-tétel bozonokra: bevezetünk egy generátorfunkcionált, $j(x)$ a tetszőleges „forrásmező”. Erre:

$$T\exp\left(-i\int d^4x j_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\right) = :\exp\left(-i\int H_1(t)dt\right): \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y j_\alpha(x)j_\beta(y)\langle 0|T(\varphi_\alpha(x)\varphi_\beta(y))|0\rangle\right) \tag{22}$$

Ennek a sorfejtésével kapjuk, hogy hogyan kell tetszőleges T-szorzatot átírni normálszorzattá. Az eredmény: propagátorokból álló integrálok: Feynman-gráfjárulékok.

A formula fermionokra is hasonló (itt $\eta(x)$ Grassmann-változó):

$$T\exp\left(-i\int d^4x(\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x))\right) = :\exp\left(-i\int d^4x(\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x))\right): \exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x\int d^4y\bar\eta(y)\langle 0|T(\psi(x)\bar\psi(y))|0\rangle\eta(y)\right) \tag{23}$$

5. Gráfszabályok

A Wick-tétellel a T-szorzatokat normálszorzattá tudjuk alakítani. A nemnulla normálszorzatokat le tudjuk rajzolni: ugyanannyi keltő operátor lehet benne, mint eltüntető, különben a járulék 0. Ezek a rajzok: a Feynman-diagrammok.

A gráfszabályok a koordinátatérben:

– kimenő részecskeláb:

$$[a(p',\sigma',n'),\Psi_l^\dagger(x)]_\mp = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ip'x}u_l^*(p',\sigma',n')$$

– kimenő antirészecske:

$$[a(p',\sigma',n^c),\Psi_l(x)]_\mp = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ip'x}v_l(p',\sigma',n)$$

– bejövő részecske:
$$[\Psi_l(x), a^\dagger(p,\sigma,n)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} u_l(p,\sigma,n)$$

– bejövő antirészecske:
$$[\Psi_l^\dagger(x), a^\dagger(p,\sigma,n)] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} v_l^*(p,\sigma,n^c)$$

– Kölcsönhatási vertex járuléka a csatolási állandó: g_i.

– Belső részecskevonal járuléka a propagátor:
$$\langle 0|T\psi_l(x)\psi^\dagger{}_m(y)|0\rangle = i\Delta_{lm}(x-y)$$

Így egy N-vertexes gráfhoz egy
$$g^N \frac{(-i)^N}{N!}$$
járulék, és egy $(-1)^F$ szorzó járul, ahol F a fermionhurkok száma.

A gráfszabályokat felírhatjuk az impulzustérben is:

– kimenő részecskeláb:
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_l^*(p',\sigma',n')$$

– kimenő antirészecske:
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v_l(p',\sigma',n'^c)$$

– bejövő részecske:
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_l(p,\sigma,n)$$

– bejövő antirészecske:
$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v_l^*(p,\sigma,n^c)$$

– Kölcsönhatási vertex járuléka a csatolási állandó:
$$-i(2\pi)^4 g_i \delta(\sum_{\text{be}} p - \sum_{\text{ki}} p)$$

– Belső részecskevonal járuléka a propagátor:
$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma_{mn}(q)}{q^2+m^2-i\varepsilon}$$

és az egész gráfhoz most egy $1/N!$ szorzó járul (ami a szimmetriák miatt a legtöbbször kiesik).

6. Funkcionálintegrálok

Heisenberg-képben dolgozunk. A kanonikus koordináta sajátállapotaira ekkor teljesül:

$$Q_a(t)|q;t\rangle = q_a|q;t\rangle,$$

illetve az impulzusra:

$$P_a(t)|p;t\rangle = p_a|p;t\rangle,$$

ahonnan a kapcsolat a Schrödinger-képbeli koordináta- illetve impulzussajátállapotokkal:

$$|q;t\rangle = e^{iHt}|q\rangle \quad \text{és} \quad |p;t\rangle = e^{iHt}|p\rangle$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\langle q';t+dt|q;t\rangle = \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} \exp\left(-iH(q',p)dt + i\sum_a (q'_a - q_a)p_a\right) \tag{24}$$

ezt felintegrálva véges időtartamra:

$$\langle q';t'|q;t\rangle = \int \prod_{\tau,a} dq_a(\tau)dp_a(\tau) \exp\left(-i\int_t^{t'} \left(\sum_a \dot{q}_a(\tau)p_a(\tau) - H(q(\tau),p(\tau))\right)d\tau\right) \tag{25}$$

Ez a funkcionálintegrál Hamilton-függvénnyel felírt alakja.

Az alábbi Gauss-integrálokra a Feynman-szabályok levezetésénél lesz szükségünk:

$$I_{r_1,\ldots,r_{2n}} = \int \prod_r dx_r x_{r_1} \ldots x_{rn} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{r,s} K_{rs}x_r x_s\right)$$

alakú integrálokra az

$$I_{r_1,\ldots,r_{2n}} = I_0 \sum \prod (K)^{-1}_{r_\alpha r_\beta}$$

képletet, ahol az összeg az r indexek összes lehetséges párosítására megy, és az $r_\alpha r_\beta$ pedig a párosításban szereplő indexeket jelöli. Itt

$$I_0 = \left(\frac{\det K}{2\pi}\right)^{-1/2}$$

A pályaintegrálokban az impulzusintegrálás lényegében a nyeregpontmódszer segítségével elvégezhető, ezzel az új alak:

$$(\ldots)\int \mathcal{D}q(\det A)^{-1/2} \exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty} L(q,\dot{q})d\tau\right), \tag{26}$$

ahol

$$H = \frac{1}{2}\sum_{nm}\int d^3x d^3y A_{\mathbf{x},n,\mathbf{y},m} P_n(\mathbf{x})P_m(\mathbf{y}) + \int d^3x \sum_n B_{\mathbf{x},n}P_n(\mathbf{x}) + C(q),$$

és a determinánst a sajátértékek szorzataként értelmezzük („végtelen mátrixok” esetén így megy).

7. A Feynman-szabályok levezetése a funkcionálintegrál-formalizmusban

Operátorok mátrixelemeit a funkcionálintegrál formalizmusban úgy kapjuk meg, hogy a fenti képletben a Hamilton-függvény helyére a

$$H+\sum_i \varepsilon(t_i)O_i(p(t),q(t)) \tag{27}$$

módosított függvényt írjuk, ahol a ε-ok tetszőleges függvények. Ekkor

$$\frac{1}{(-i)^k}\frac{\delta\langle q';t|q;t\rangle}{\delta\varepsilon_{i_1}(t_1)\ldots\delta\varepsilon_{i_n}(t_n)}=\langle q',t|T(O(t_1)\ldots O(t_n))|q;t\rangle. \tag{28}$$

A szórásmátrix elemeinek a meghatározásához kell még a vákuum hullámfüggvénye:

$$\langle 0,\mathrm{out}|q(\infty),\infty\rangle$$

illetve

$$\langle q(-\infty),-\infty|0,\mathrm{in}\rangle.$$

Ezekre a hullámfüggvényekre Schrödinger-reprezentációban, azt felhasználva, hogy a vákuumhullámfüggvényt az eltüntető operátor a 0-ba viszi, kapunk differenciálegyenletet (az eltüntető operátort a téroperátorral kifejezve). A kapott egyenlet skalármező esetén:

$$\int d^3x\left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)}+E(p)\phi(x)\right)\langle\phi(x),-\infty|0,\mathrm{in}\rangle=0 \tag{29}$$

(és hasonlóan az out-vákuum esetén). Ennek a megoldása:

$$langle\phi(x),-\infty|0,\mathrm{in}\rangle=N\exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^3x\int d^3y\mathcal{E}(x,y)\phi(x)\phi(y)\right\}, \tag{30}$$

ahol

$$\mathcal{E}(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3pe^{i\mathbf{p}(x-y)}E(\mathbf{p}),$$

ahol

$$E(\mathbf{p})=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}.$$

Ennek felhasználásával

$$\langle 0,\mathrm{in}|T(O_1(t_1)\ldots O_n(t_n))|0,\mathrm{out}\rangle=|N|^2\int\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\pi O_1\ldots O_n$$
$$\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left\{\dot{\phi}\pi-H+i\varepsilon\int d^x\int d^3y\mathcal{E}(x,y)e^{-\varepsilon}|\tau|\phi(x,\tau)\phi(y,\tau)\right\}\right) \tag{31}$$

8. A Feynman-diagrammok bevezetése funkcionálintegrál-formalizmusban

A Lagrange-függvényt felbontjuk egy kvadratikus perturbálatlan és egy perturbáló részre:

$$L = L_0 + L_1,$$

ekkor az

$$I[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} (L(\phi, \dot{\phi}) - i\epsilon(\dots)) \tag{32}$$

integrált (pontos alakját ld. feljebb) is sorbafejthetjük:

$$\exp(iI) = \exp(iI_0) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} I_1^N, \tag{33}$$

a kiszámolandó I_1-et a Gauss-integrálok segítségével kaphatjuk. Az I_1-hatványokból a (28)-adik formula segítségével kapjuk a mátrixelemet. Az itteni járulékok: éppen a Feynman-diagrammok járulékai.

A propagátor: az L_0-ban szereplő kvadratikus alak inverze.

9. Feynman-integrál fermionokra

A Feynman-integrálás fermionokra hasonlóan vihető végbe, ekkor azonban az impulzus- és koordinátasajátértékeket Grassmann-számoknak kell tekintenünk. Ezekre az integrálás az ú.n. Berezin-integrál segítségével történik: ha

$$f(\xi_1, \dots, \xi_N) = C^{(0)} + \sum_i C_i^{(1)} \xi_i + \dots + C^{(N)} \xi_1 \dots \xi_N,$$

akkor

$$\int \tilde{\prod_i} d\xi_i f := C^{(N)}, \tag{34}$$

ahol

$$\tilde{\prod_i} \xi_i = \xi_N \dots \xi_1.$$

A Feynman-integrálban is a térmennyiségek szerinti integrálokat fermionok esetén Berezin-integráloknak kell tekinteni. A fenti levezetés szinte szó nélkül megismételhető, azonban most a Gauss-integráloknál nem a determináns gyöke, hanem a reciproka jelenik meg.