6. Szabad terek kvantumelmélete, szimmetriák

Lukács Árpád

2004. június 13.

1. Történeti bevezetés

A kvantumelmélet történetének egyik első állomása MAX PLANCK kvantumhipotézise: a feketetest-sugárzás energiaeloszlását Planck úgy tudta levezetni, ha feltette, hogy egy üregben lévő elektromágneses sugárzás energiája nem vehet fel akármilyen értéket, a ν frekvenciájú módus energiája csak az

$$E = h\nu$$

elemi energiakvantum egész számú többszöröse lehet.

Ezután a kvantumelmélet fejlődése a kvantummechanika irányában indult meg: a cél az atomok színképének megmagyarázása volt. Ebben az első sikereket NIELS BOHR a hatás kvantálásán alapuló elmélete tudhatta magáénak (első kvantumelmélet). A kvantummechanika modern fegyvertárának (Hilbert-tér, állapotvektor, hullámfüggvény, operátorok) bevezetése WERNER HEISENBERG, ERWIN SCHRÖDINGER, P. A. M. DIRAC, P. JORDAN és NEUMANN JÁNOS nevéhez fűződik. Az elmélet kiépítése a XX. század húszas-harmincas éveire tehető.

Az erőterek kvantálására az elmélet - annak ellenére, hogy ez volt az egyik kiindulópontja - csak a kvantummechanika kiépítése után vált alkalmassá. Mint látni fogjuk, ezt a kanonikus formalizmus tette lehetővé: ennek segítségével a klasszikus mechanika és a klasszikus mezőelméletek formailag hasonló alakra hozhatók, és ilymódon a kvantummechanikában megismert módszerek a terek kvantumelméletébe átvihetők.

Az átvitel legegyszerűbben a lineáris téregyenletek esetén lehetséges: ekkor egy véges térrészt vizsgálva, ott a Fourier-transzformáció segítségével a mező oszcillátorok összegeként fogható fel, a kvantummechanika szerint az oszcillátor energiájának kvantuma

$$\hbar\omega,$$

így a térkvantálás visszavezethető az oszcillátor kvantumelméletére.

Az első nehézségek is itt léptek fel: a sugárzási tér végtelen szabadsági fokú rendszer, így az oszcillátorfelbontásában is végtelen számú oszcillátor lép fel. Ezen oszcillátorok zérusponti energiái a Hamilton-operátorban egy végtelen alapállapoti járulékot adnának. Látni fogjuk, hogy ez a Hamilton-operátor normálrendezése révén kiküszöbölhető.

2. Alapgondolat, kanonikus kvantálás

A kanonikus kvantálás alapgondolatát itt a skalármező esetére mutatjuk be. Magasabb helicitású (például vektormező: elektrodinamika) esetén lényegében ugyanez az eljárás alkalmazható, további nehézséget csak a mellékfeltételek (mértékválasztás, kényszerek) jelentenek.

A szabad mezők esetén azonban általában a kényszerek kezelése is megoldható (ld. az elektrodinamika Gupta–Bleuler-kvantálását, illetve a Hamilton–Dirac-formalizmust). Érdekességként jegyezzük meg, hogy a kanonikus gravitáció (ADM-formalizmus) esetén nem ez a helyzet: itt a kényszerfeltételekben máig sem sikerült az operátorok egy olyan rendezését megtalálni, amellyel a kényszeroperátorok megfelelő tulajdonságai biztosíthatók lettek volna.

A kanonikus kvantálás kiindulópontja a Lagrange-formalizmus. A skalármező Lagrange-függvénye:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_i\varphi\partial^i\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \tag{1}$$

Innen a klasszikus mechanika mintájára a kanonikus impulzus:

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\varphi} = \partial^0\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

így a Hamilton-függvény:

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\varphi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \tag{2}$$

A kanonikus kvantálás során a térmennyiségeket operátorokkal helyettesítjük, és a kanonikus koordinátákra és impulzusokra kikötjük a kanonikus kommutátorrelációt:

$$[\pi(\mathbf{x},t), \varphi(\mathbf{x}',t)] = i\hbar\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{3}$$

3. Fizikai értelmezés: Fock–tér

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy hogyan magyarázza meg a fenti elmélet a terek részecskejellegét (ilymódon a foton létét és a Planck-féle kvantumhipotézist is.) Ennek érdekében fejtsük ki a térmennyiséget Fourier-sorba:

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \int 2\pi\delta(p^2-m^2)a(p)e^{-ipx}. \tag{4}$$

A deltafüggvény azt biztosítja, hogy az (1) Lagrange-függvényből származó téregyenletnek, azaz a Klein–Gordon-egyenletnek eleget tegyen a ϕ. Ezt a Dirac-delta tulajdonságai alapján, és a valósság figyelembe vételével átalakíthatjuk:

$$\varphi(\mathbf{x},t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})}\left\{a(\mathbf{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}\right\}, \tag{5}$$

illetve teljesen hasonlóan:

$$\pi(\mathbf{x},t) = -i\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2}\left\{a(\mathbf{p})e^{-ipx} - a^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}\right\}, \tag{6}$$

valamint ezeket az összefüggéseket megfordítva:

$$a(\mathbf{p}) = -i \int dx \left\{ i\omega(\mathbf{p}) e^{ipx} \varphi(x) - e^{ipx} \pi(x) \right\}. \tag{7}$$

Ekkor kapjuk a

$$\left[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')\right] = (2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) \tag{8}$$

kommutátorrelációt, illetve felírhatjuk ezekkel az operátorokkal a Hamilton-operátort:

$$\begin{aligned} :P^i: &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \omega(\mathbf{p})} p^i a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \\ :\mathcal{H}: &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \omega(\mathbf{p})} \hbar\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}), \end{aligned} \tag{9}$$

(Vegyük észre a normálrendezés hatását: enélkül az integrál divergálna: az alapállapoti energia végtelennek adódna, ami értelmetlen.)

Innen már leolvashatjuk az operátorok fizikai jelentését: az $a^\dagger(\mathbf{p})$ operátor a $\mathbf{p}$ impulzusú részecskeállapot keltőoperátora, $a(\mathbf{p})$ pedig az eltüntető. Az

$$\mathcal{N}(\mathbf{p}) = a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \tag{10}$$

pedig az ugyanezen impulzushoz tartozó részecskeszám-operátor. Ekkor a különböző állapotokat is fel tudjuk írni. Az az állapot, amelyet az összes eltűntetőoperátor a nullába visz:

$$|0\rangle$$

a vákuumállapot (nem tévesztendő össze a 0 vektorral!), ezekbe egy részecskét keltve kapjuk a

$$|\mathbf{p}\rangle$$

egyrészecskeállapotokat, majd hasonlóan a sokrészecskeállapotokat:

$$|\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N\rangle.$$

Így tehát az állapottér szerkezete:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots \tag{11}$$

azaz a teljes *Fock-tér* a különböző n-részecske-állapotokhoz tartozó alterek direkt összege.

Weinberg a térkvantálásnak egy a fentihez képest fordított felépítését adja: feltételezi, hogy vannak részecskék, és hogy az elmélet Hilbert-tere a fenti alakú. Ezután bevezeti a keltő- és eltűntetőoperátorokat, majd az elmélet relativisztikus alakjával indokolja, hogy miért kell a mezőket az (5) formulával bevezetni. A Hamilton-operátort szintén mint az elmélet egyik lehetséges, a szimmetriákat figyelembe vevő felépítését tárgyalja.

Fontos még megjegyeznünk, hogy feles spinű részecskék (fermionok) esetén a fenti eljárás hasonlóan véghezvihető, azonban ekkor a keltő és eltüntető operátorokra nem kommutátorrelációt, hanem antikommutátor-relációt kell előírnunk.

4. Szimmetriák

Az elmélet szimmetriái ábrázolódnak az állapottéren. WIGNER JENŐ tétele szerint ez az ábrázolás vagy unitér:

$$\begin{aligned} \langle U\Phi, U\Psi\rangle &= \langle \Phi, \Psi\rangle \\ U(\xi\Phi+\eta\Psi) &= \xi U\Phi+\eta U\Psi, \end{aligned} \tag{12}$$

vagy antiunitér

$$\begin{aligned} \langle U\Phi, U\Psi\rangle &= \langle \Psi, \Phi\rangle \\ U(\xi\Phi+\eta\Psi) &= \xi^* U\Phi+\eta^* U\Psi, \end{aligned} \tag{13}$$

operátorokkal történik.

Ekkor természetesen az ábrázolást az állapottér operátoraira is ki kell terjeszteni az

$$O' = UOU^{-1}$$

formulával.

Gyakran az ábrázolásban több mező szerepel (pl. U(1) esetén a komplex mező valós és képzetes része):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_A \left(\partial_i\varphi_A\partial^i\varphi_A - \frac{1}{2}m^2\varphi_A^2\right).$$

Ekkor az ábrázolás téridőszimmetriák esetén:

$$U(\Lambda)\Phi_A(p) = \sum_{A'} C(\Lambda)_{AA'}\varphi_{A'}(\Lambda p),$$

(az ábrázolásokra még később visszatérünk), illetve belső szimmetriák esetén

$$U(g)\Phi_A(p) = \sum_{A'} C(g)_{AA'}\varphi_{A'}(p).$$

A Noether-tétel szerint a szimmetriacsoport minden egyparaméteres részcsoportjához tartozik egy megmaradó áram:

$$J_A^i = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_i\varphi_B(x)}(t^A)_{BC}\varphi_C(x) \tag{14}$$

amelyre:

$$\partial_i J_A^i = 0. \tag{15}$$

Ez azt jelenti, hogy a megfelelő

$$Q_A = \int d^3x J_A^0(x)$$

töltés megmarad.

Szintén a szimmetriáknál kell megemlítenünk a mérték-elvet: bizonyos globális szimmetriák mellett bevezethetünk helyfüggő szimmetriákat is. Azt azonban figyelembe kell vennünk, hogy a hely- és időfüggés nem lehet akármilyen: a fénykúpon belül megköti a dinamika a szimmetriatranszformációt. A kompenzáló mező is dinamikai (részletesen lásd: Patkós–Polónyi, vagy a 8-dik tétel).

5. A téridőszimmetriák ábrázolása

Tekintsünk egy, az identikustól csak egy kicsit eltérő Lorentz-transzformációt:

$$\Lambda^i_j = \delta^i_j + \omega^i_j.$$

Ekkor a megfelelő ábrázoló operátor (az exponenciális első tagja):

$$U(1+\omega,\epsilon) = 1 + \frac{1}{2} i\omega_{ij} J^{ij} - i\epsilon_i P^i.$$

Ekkor a generátorok (J, P) önadjungáltak, J antiszimmetrikus. A Noether-tételnek megfelelően: P az impulzus, J pedig az impulzusmomentum operátora. Ezek az operátorok a Poincaré-algebrának tesznek eleget:

$$\begin{aligned} i[J^{ij}, J^{kl}] &= \eta^{jk} J^{kl} - \eta^{ik} J^{jl} - \eta^{lk} J^{kj} + \eta^{lj} J^{ki}, \\ i[P^i, J^{kl}] &= \eta^{ik} P^l - \eta^{il} P^k, \\ [P^i, P^j] &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

A generátorok 3+1-felbontása: a Hamilton:

$$H = P^0 \tag{17}$$

az impulzus:

$$\mathbf{P} = (P^1, P^2, P^3) \tag{18}$$

az impulzusmomentum:

$$\mathbf{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12}), \tag{19}$$

valamint a boostok generátorai:

$$\mathbf{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03}). \tag{20}$$

Ezek kommutátorai:

$$\begin{aligned} &= i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, J_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, P_j] &= i\varepsilon_{ijk} P_k \\ [K_i, P_j] &= -iH\delta_{ij} \\ [J_i, H] &= [P_i, H] = [H, H] = 0 \\ [K_i, H] &= -iP_i. \end{aligned} \tag{21}$$

6. A téridőszimmetriák hatása az egyrészecske-állapotokon

A hatás a fentiek szerint:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma\sigma'} \Psi_{\Lambda p,\sigma'}$$

Bevezetve egy, az adott impulzushoz tartozó Lorentz-transzformációt:

$$p^i = L^i_k k^k,$$

ahol $k = (1{,}0{,}0{,}1)$ (illetve $k = (1{,}0{,}0{,}0)$), és a

$$W(\Lambda, p) = L(\Lambda p)^{-}1\Lambda L(p)$$

Wigner-forgatást, kapjuk:

$$W^i_k k^k = k^i,$$

illetve:

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(W(\Lambda, p))\Psi_{\Lambda p,\sigma'}.$$

6.1. A tükrözések ábrázolása

A CPT-transzformációk az alábbi módon transzformálják el a Lorentz-csoport generátorait:

$$\begin{aligned} P\mathbf{J}P^{-1} &= \mathbf{J} \\ P\mathbf{K}P^{-1} &= -\mathbf{K} \\ P\mathbf{P}P^{-1} &= -\mathbf{P} \\ T\mathbf{J}T^{-1} &= -\mathbf{J} \\ T\mathbf{K}T^{-1} &= \mathbf{K} \\ T\mathbf{P}T^{-1} &= -\mathbf{P} \\ PHP^{-1} &= THT^{-1} = H \end{aligned} \tag{22}$$

Ezek ábrázolásakor megjelenik egy fázisfaktor:

$$P : M > 0 \quad P\Psi_{p,\sigma} = \eta\Psi_{Pp,\sigma},$$

illetve

$$T : M > 0 \quad T\Psi_{p,\sigma} = \zeta(-1)^{j-\sigma}\Psi_{Pp,-\sigma},$$

valamint tömegtelen mezőre:

$$P : M = 0 \quad P\Psi_{p,\sigma} = \eta_\sigma e^{\mp i\pi\sigma}\Psi_{Pp,-\sigma},$$

illetve

$$T : M = 0 \quad T\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma e^{\pm i\pi\sigma}\Psi_{Pp,\sigma}.$$

A CPT-tétel kimondja, hogy minden lokális relativisztikus kvantumtérelméletnek a CPT kombinált tükrözés szimmetriája.