5. Geometriai szimmetriacsoportok: forgáscsoport, Poincaré-csoport, tükrözések

2004. június 17.

1. Sugárábrázolásokról általában

A kvantumelméletben (legalábbis a kvantummechanikában) a rendszer eseményalgebrája egy $\mathcal{H}$ Hilbert-tér $\mathfrak{Pr}(\mathcal{H})$ projektorhálója. Ezért a téridőcsoportot, és egyéb szimmetriákat a $\mathfrak{Pr}(\mathcal{H})$-n kell ábrázolnunk. A G csoport $\mathfrak{Pr}(\mathcal{H})$-n vett ábrázolásának egy olyan

$$S\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{Pr}(\mathcal{H}))$$

folytonos leképezést tekintünk, amelyre

$$S_g \circ S_h = S_{gh} \qquad \forall g, h \in G$$

fennáll.

Egy $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ függvény unitér, ha lineáris és $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ -ra $\langle U\phi, U\psi\rangle = \langle \phi, \psi\rangle$. Antiunitér, ha konjugált-lineáris (azaz $U(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha^* U\phi + \beta^* U\psi$) és $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ -ra $\langle U\phi, U\psi\rangle = \langle \psi, \phi\rangle$.

Wigner tétele. Ha $S \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{Pr}(\mathcal{H}))$, akkor egységnyi abszolútértékű szorzófaktor erejéig egyértelműen létezik olyan $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitér vagy antiunitér, hogy $\forall P \in \mathfrak{Pr}(\mathcal{H})$ -ra $S(P) = UPU^{-1}$.

Fizikusok gyakran így ismerik a Wigner-tételt: Ha $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ olyan, hogy $\forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ -ra $|\langle U(\phi), U(\psi)\rangle| = |\langle \phi, \psi\rangle|$, akkor U vagy unitér vagy antiunitér.

Def. G csoport, $\mathrm{ar}\colon G \to \{-1, 1\}$ csoporthomomorfizmus (ez lesz a nyíl), $\gamma\colon G \times G \to \mathbb{S}^1$ *nyílunitér kociklus*, ha

1. $\gamma(e, e) = 1$,
2. $\gamma(g, h)\gamma(gh, f) = \gamma(g, hf)\gamma(h, f)^{*(\mathrm{ar}\, g)} \qquad \forall f, g, h \in G$.

A $*(\mathrm{ar}\, g)$ azt jelenti, hogy akkor van konjugálás, ha $\mathrm{ar}\, g = -1$, és akkor nincs, ha $\mathrm{ar}\, g = 1$.

Def. A G csoportnak (U, γ) *nyílunitér sugárábrázolása*, ha

1. γ nyílunitér kociklus,
2. $g \mapsto U_g$ unitér ha $\mathrm{ar}\, g = 1$, és antiunitér ha $\mathrm{ar}\, g = -1$
3. $U_g U_h = \gamma(g, h) U_{gh} \qquad \forall g, h \in G$.

Def.

1. (U, γ) *irreducibilis*, ha csak a triviális altérre igaz, hogy minden $g \in G$ esetén invariáns U_g-re.
2. (U, γ) *hű*, ha $g \mapsto \left(P \mapsto U_g P U_g^{-1}\right)$ injektív, azaz $g \neq h \Rightarrow U_g \neq \lambda U_h$.

Megjegyzések: 1. Mivel minden projektorháló-automorfizmus előáll lényegében egyértelműen unitér vagy nyílunitér alakban, ezért a projektorháló-ábrázolások pontosan megfelelnek a nyílunitér sugárábrázolásoknak. Ezért elegendő a nyílunitér sugárábrázolásokkal foglalkoznunk. 2. Az egységelem összefüggő komponensében minden elemre ar = 1, azaz itt minden U unitér. Speciálisan ha a csoport összefüggő, akkor minden nyílunitér sugárábrázolásában csak unitér operátorok szerepelnek.

Egy G összefüggő Lie-csoportnak a G' összefüggő Lie-csoport *univerzális fedőcsoportja*, ha egyrészt G'-nek létezik olyan fedőleképezése G-be, amely egyben csoporthomomorfizmus (hogy ez pontosan mit jelent, az most nem fontos, a lényeg az, hogy G' fedje G-t), másrészt a G' egyszeresen összefüggő, azaz a fundamentális csoportja a triviális (egyelemű) csoport. A G' az egységelem egy környezetében lokálisan izomorf a G-vel, és ugyanaz a Lie-algebrájuk.

Tétel. Minden összefüggő Lie-csoportnak létezik univerzális fedőcsoportja, és ez izomorfia erejéig egyértelmű.

Tétel. Egy G összefüggő Lie-csoport minden sugárábrázolása valódi unitér ábrázolása az univerzális fedőcsoportjának, és az univerzális fedőcsoport minden valódi unitér ábrázolása sugárábrázolása a G-nek.

Tehát a G sugárábrázolásai pontosan az univerzális fedőcsoportjának a valódi unitér ábrázolásai. Mivel az univerzális fedőcsoport magának is univerzális fedőcsoportja (a fedés az indentitás), ezért ez azt jelenti, hogy az univerzális fedőcsoportnak minden sugárábrázolása valódi unitér ábrázolás, azaz $\gamma = 1$. A Lie-algebra ábrázolásai egyértelműen megfelelnek az univerzális fedőcsoport ábrázolásainak.

Az eredeti feladat: Megkeresni a szimmetriacsoport összes (gyengén) irreducibilis projektorháló-ábrázolását. A fentiek fényében ez ezzel ekvivalens: Megkeresni a szimmetriacsoport univerzális fedőcsoportjának összes irreducibilis unitér ábrázolását.

2. Forgáscsoport

(E, η) 3 dimenziós (valós) euklideszi vektortér. Ebben a skalárszorzattartó lineáris leképezések alkotják az $O(3)$ csoportot.

$$O(3) = \Big\{ A\colon E \to E \;\Big|\; A \text{ lineáris}, \quad \eta(Ax, Ay) = \eta(x, y) \quad \forall x, y \in E \Big\}$$

A^* legyen az A-nak az η szerinti adjungáltja. Ekvivalens megfogalmazások:

1. $A \in O(3)$
2. $\eta(Ax, Ax) = \eta(x, x) \quad \forall x \in E$
3. $A^* = A^{-1}$

Minden $A \in O(3)$-ra igaz, hogy $\det A = \pm 1$.

$$SO(3) = \Big\{ A \in O(3) \;\Big|\; \det A = 1 \Big\}$$

Az $SO(3)$ a forgáscsoport. Ennek minden eleme egy tengely körüli forgatás. $O(3) = SO(3) \times Z_2$.

Az $SO(3)$ fundamentális csoportja a Z_2, ezért az univerzális fedőcsoportja kétszeresen fedi. Az univerzális fedőcsoportja az $SU(2)$. A fedést az

$$A^{kl} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma^k U \sigma^l U^\dagger)$$

képlet adja meg, ahol $U \in SU(2)$, σ^k pedig a Pauli-mátrixok

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

Az $SO(3)$ Lie-algebrája az $E \to E$ η-antiszimmetrikus leképezések, azaz amelyekre $A^* = -A$. Szokásosan $E = \mathbb{R}^3$, és akkor A^* simán az A mátrix transzponáltja. A Lie-algebrában egy bázis:

$$B_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Ezek kommutációs relációja:

$$[B_i, B_j] = \epsilon_{ijk} B_k$$

Ezek helyett inkább a

$$J_i = iB_i$$

hermitikus generátorokat tekintjük. Ezek kommutációs relációja

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k.$$

Ekkor minden forgatás egyértelműen áll elő

$$e^{-i\varphi \mathbf{n}\mathbf{J}}$$

alakban, ahol $\mathbf{n} \in E$ egységvektor, $\varphi \in [0, \pi]$, kivéve a π-vel való forgatásokat, mert azok így kétszer állnak elő. (Ez az $\mathbf{n}$ körüli φ szögű forgatás.)

Az irreducibilis unitér sugárábrázolások egyértelműen jellemezhetők egy $j \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}$ számmal. A j-edik ábrázolás $d = 2j + 1$ dimenziós. Legyen S_i a J_i ábrázoltja. A j-edik ábrázolásban a bázist az S_3 sajátvektorainak szoktuk választani, és $|j, m\rangle$-mel jelöljük, ahol

$$S_3 \,|j, m\rangle = m \,|j, m\rangle\,, \qquad m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j.$$

A léptető operátorok léptetnek az S_3 sajátvektorai között:

$$S_+ = S_1 + iS_2, \qquad S_- = S_1 - iS_2,$$

$$S_\pm \,|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\,|j, m \pm 1\rangle\,.$$

A Casimir-operátor az

$$S^2 = S_1 S_1 + S_2 S_2 + S_3 S_3,$$

ez mindennel kommutál.

$$S^2 \,|j, m\rangle = j(j+1)\,|j, m\rangle$$

Ha j egész, akkor az ábrázolás valódi unitér ábrázolása $SO(3)$-nak, ha j félegész, akkor csak sugárábrázolása $SO(3)$-nak, és csak $SU(2)$-nek valódi ábrázolása.

A D^{j_1} és D^{j_2} irreducibilis ábrázolások tenzorszorzata a következőképpen bomlik fel irreducibilisek összegére (Clebsch-sor):

$$D^{j_1} \otimes D^{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} D^j$$

3. Poincaré-csoport

3.1. A Poincaré-csoport előállítása

Legyen $(M, \eta, \mathbb{R})$ egy speciális relativisztikus téridőmodell. Az M alatt fekvő vektortér $\mathbf{M}$. Ha $L\colon M \to M$ affin leképezés, akkor $\mathbf{L}\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ az alatta fekvő lineáris leképezés.

Def. *Lorentz-csoport*

$$\mathcal{L} := \left\{ \mathbf{L}\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M} \;\middle|\; \mathbf{L} \text{ lineáris}, \quad \eta(\mathbf{L}\mathbf{x}, \mathbf{L}\mathbf{y}) = \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M} \right\}$$

Ennek a négy összefüggő komponense

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \left\{ \mathbf{L} \in \mathcal{L} \;\middle|\; \det \mathbf{M} = 1, \quad \text{jövőszerűt jövőszerűbe visz} \right\},$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = \left\{ \mathbf{L} \in \mathcal{L} \;\middle|\; \det \mathbf{M} = -1, \quad \text{jövőszerűt múltszerűbe visz} \right\},$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \left\{ \mathbf{L} \in \mathcal{L} \;\middle|\; \det \mathbf{M} = -1, \quad \text{jövőszerűt jövőszerűbe visz} \right\},$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = \left\{ \mathbf{L} \in \mathcal{L} \;\middle|\; \det \mathbf{M} = 1, \quad \text{jövőszerűt múltszerűbe visz} \right\}.$$

A $\uparrow$ és $\downarrow$ az időirányítás megtartására utal, a $+$ és $-$ pedig arra, hogy a tér irányítását megtartja-e. Az egységelem az $\mathcal{L}_+^\uparrow$-ban van.

Def. *Poincaré-csoport*

$$\mathcal{P} = \left\{ L\colon M \to M \;\middle|\; L \text{ affin}, \quad \mathbf{L} \in \mathcal{L} \right\}$$

Ennek a négy összefüggő komponense

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_+^\uparrow &= \left\{ L \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathbf{L} \in \mathcal{L}_+^\uparrow \right\} \\
\mathcal{P}_+^\downarrow &= \left\{ L \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathbf{L} \in \mathcal{L}_+^\downarrow \right\} \\
\mathcal{P}_-^\uparrow &= \left\{ L \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathbf{L} \in \mathcal{L}_-^\uparrow \right\} \\
\mathcal{P}_-^\downarrow &= \left\{ L \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathbf{L} \in \mathcal{L}_-^\downarrow \right\}
\end{aligned}$$

A Poincaré-csoportot szokás inhomogén Lorentz-csoportnak is hívni, mert azt mondják, hogy a Poincaré-csoport egyenlő a Lorentz-csoport plussz eltolások csoportjával. Meg azt is szokták mondani, hogy a Poincaré-csoportnak részcsoportja a Lorentz-csoport. Namost ebből a következő igaz. Tekintsük most úgy, hogy $M = \mathbf{M}$ affin tér önmaga fölött. Ekkor $\mathcal{P}$ minden eleme egyértelműen reprezentálható $\mathcal{L} \times \mathbf{M}$ egy elemével a következő módon: $L\mathbf{x} = T(\mathbf{L}, \mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Ebben a felírásban a szorzási szabály

$$\begin{gathered}
T(\mathbf{L}_2, \mathbf{a}_2)\, T(\mathbf{L}_1, \mathbf{a}_1) = T(\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{L}_2\mathbf{a}_1), \\
T(\mathbf{L}, \mathbf{a})^{-1} = T(\mathbf{L}^{-1}, -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{a}),
\end{gathered}$$

azaz $\mathcal{P}$ az $\mathcal{L}$ és az $\mathbf{M}$ féldirekt szorzata oly módon, hogy az $\mathcal{L}$ természetes módon hat az $\mathbf{M}$-en. Így tehát valóban az eltolások egy jól meghatározott normális részcsoportot alkotnak $\mathcal{P}$-ben, az $\mathcal{L}$ viszont nem normálosztó. A Poincaré-csoportban kontinuum sok $\mathcal{L}$-lel izomorf részcsoport van, amelyek minden szempontból ekvivalensek. Ha az $M = \mathbf{M}$ felírást alkalmazzuk, akkor úgy tűnik, hogy a $T(\mathbf{L}, \mathbf{0})$ lakú elemek egy kitüntetett $\mathcal{L}$-lel izomorf részcsoportot alkotnak. Azonban ha másik kezdőpontból vektorizáljuk M-et, akkor egy másik $\mathcal{L}$-lel izomorf részcsoport lesz ilyen módon kitüntetve. Az, hogy a Poincaré-csoport ilyen féldirekt szorzat alakú, az ábrázolások megkeresésekor jól fog jönni.

A szokásos tárgyalásban $M = \mathbf{M} = \mathbb{R}^4$, és a Poincaré csoportot a $T(\Lambda, a)$ alakú elemek halmazaként kezelik, és $T(\Lambda_2, a_2)\, T(\Lambda_1, a_1) = T(\Lambda_2\Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1)$. Itt a Λ-k a Lorentz-csoport elemei, azaz amelyekre igaz, hogy az $x^\mu y_\mu = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$ Minkowski-formát megtartják.

Az ilyen formában megadott Λ-k a következőket tudják. A $\mathcal{L}^\uparrow$-ba tartoznak azok, amelyekre ${\Lambda^0}_0 \geq 1$, és a $\mathcal{L}^\downarrow$-ba azok, amelyekre ${\Lambda^0}_0 \leq -1$. Továbbá

$${\Lambda^\nu}_\sigma {\Lambda^\kappa}_\tau \eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa}$$

$${(\Lambda^{-1})^\rho}_\nu = {\Lambda_\nu}^\rho = \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}{\Lambda^\mu}_\sigma$$

A

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\text{-et}$$

szokás tértükrözésnek, a

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\text{-et}$$

szokás időtükrözésnek hívni. Ekkor a többi összefügő komponens az egységelem komponenséből így kapható:

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \mathcal{P}\mathcal{L}_+^\uparrow, \quad \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathcal{T}\mathcal{L}_+^\uparrow, \quad \mathcal{L}_-^\downarrow = \mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{L}_+^\uparrow.$$

A $\mathcal{P}_+^\uparrow$ nem egyszeresen összefüggő. Az univerzális fedőcsoportja $SL(2, \mathbb{C})$ és $\mathbb{R}^4$ féldirekt szorzata.

3.2. A Poincaré-csoport Lie-algebrája

Kis transzformációkat tekintsünk, azaz $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, $a^\mu = \varepsilon^\mu$, ahol ω és ε infinitezimálisak. Az $\Lambda^\nu{}_\sigma \Lambda^\kappa{}_\tau \eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa}$ tulajdonság miatt ω antiszimmetrikus, azaz $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, tehát 6 független paramétert tartalmaz.

Legyen $U(\Lambda, a)$ a $T(\Lambda, a)$-nak az ábrázoló operátora valamely unitér ábrázolásban. Ekkor

$$U(1+\omega, \varepsilon) = 1 + \frac{1}{2} i\omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\varepsilon_\rho P^\rho + \dots$$

Mivel $U(1+\omega, \varepsilon)$ unitér, ezért

$$J^{\rho\sigma\,\dagger} = J^{\rho\sigma}, \qquad P^{\rho\,\dagger} = P^\rho,$$

továbbá ω antiszimmetrikussága miatt

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}.$$

A $J^{\rho\sigma}$ a négyes-impulzusmomentum operátor, a P^ρ a négyes-impulzus operátor. Ezek így transzformálódnak:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)\, J^{\rho\sigma}\, U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu), \\ U(\Lambda, a)\, P^\rho\, U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu. \end{aligned}$$

A kommutációs relációik:

$$\begin{aligned} i\,[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu}, \\ i\,[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= \eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho, \\ [P^\mu, P^\rho] &= 0. \end{aligned}$$

A Pauli–Lubanski-vektor:

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu J_{\rho\sigma}$$

A Poincaré-csoport Lie-algebrájának a két Casimir-operátora:

$$P^\mu P_\mu \qquad \text{és} \qquad W^\mu W_\mu.$$

Ezek mindegyik generátorral kommutálnak. Ha irreducibilis ábrázolásban vagyunk, akkor ezek az identitás számszorosai.

A generátorokat felhasíthatjuk. Ekkor a Hamilton-operátor az időeltolás generátora

$$H = P^0,$$

a hármasimpulzus a téreltolások generátora

$$\mathbf{P} = \left(P^1, P^2, P^3\right),$$

a hármas-impulzusmomentum a forgatásoké

$$\mathbf{J} = \left(J^{23}, J^{31}, J^{12}\right),$$

és a boost-vektorok

$$\mathbf{K} = \left(J^{01}, J^{02}, J^{03}\right).$$

Ezekre a kommutátorok

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k, \\ [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk} P_k, \\ [K_i, P_j] &= -iH\delta_{ij}, \\ [J_i, H] &= [P_i, H] = [H, H] = 0, \\ [K_i, H] &= -iP_i. \end{aligned}$$

3.3. Az irreducibilis unitér ábrázolások

A Poincaré-csoport nem kompakt, így minden irreducibilis unitér ábrázolása végtelen dimenziós. Először csak $\mathcal{P}_+^\uparrow$-t ábrázoljuk. Az ábrázolások megkeresésében egy nagyon fontos dolog, hogy a Poincaré-csoport az a Lorentz-csoport és az eltolások féldirekt szorzata, továbbá hogy ennek következtében az eltolások csoportja egy normális részcsoport a Poincaré-csoportban.

Az eltolások csoportja kommutatív, így minden irreducibilis ábrázolása 1 dimenziós, és a

$$a \mapsto e^{ip_\mu a^\mu}$$

alakú, ahol a p impulzus egyértelműen jellemzi az ábrázolást.

Rögzítsünk egy k ún. reprezentáns impulzust. Legyen $\Omega(k)$ a k tömeghéja, és legyen

$$G(k) = \left\{ \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \;\middle|\; \Lambda k = k \right\}$$

a k-hoz tartozó ún. kiscsoport. A kiscsoport függ attól, hogy a k impulzus milyen típusú. A következő táblázat tartalmazza a kiscsoportot, és hogy milyen reprezentáns impulzust szokás választani.

	típus	k^μ	kiscsoport
(a)	$p^\mu p_\mu = M^2 > 0, \quad p^0 > 0$	$(M, 0, 0, 0)$	$SO(3)$
(b)	$p^\mu p_\mu = M^2 > 0, \quad p^0 < 0$	$(-M, 0, 0, 0)$	$SO(3)$
(c)	$p^\mu p_\mu = 0, \quad p^0 > 0$	$(\kappa, 0, 0, \kappa)$	$ISO(2)$
(d)	$p^\mu p_\mu = 0, \quad p^0 < 0$	$(-\kappa, 0, 0, \kappa)$	$ISO(2)$
(e)	$p^\mu p_\mu = -N^2 < 0$	$(0, 0, 0, N)$	$SO(2,1)$
(f)	$p^\mu = 0$	$(0, 0, 0, 0)$	$\mathcal{L}_+^\uparrow$

Az $ISO(2)$ az euklideszi sík izometriacsoportja, azaz a síkbeli forgatások és eltolások csoportja.

Minden p-hez az $\Omega(k)$ tömeghéjon választunk egy $L(p)$ standard boostot, melyre $p = L(p)k$. Ekkor minden $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$-ra definiálhatjuk a

$$W_k(\Lambda, p) = L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p) \in G(k)$$

Wigner-forgatást. Az $\Omega(k)$ tömeghéjon a kovariáns mérték

$$\mathrm{d}\omega_k(p) := \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{2\,|p^0|}.$$

A $G(k)$ irreducibilis ábrázolásait egyértelműen jellemző paraméter legyen ρ. (Például a $G(k) = SO(3)$ esetben $\rho \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}$.) A ρ ábrázoláshoz tartozó Hilbert-tér legyen $\mathcal{H}^\rho_{G(k)}$, a skalárszorzás $\langle , \rangle^\rho_{G(k)}$, az ábrázoló operátor egy $\Lambda \in G(k)$ -ra pedig $D^{k,\rho}(\Lambda)$.

Ekkor a $\mathcal{P}_+^\uparrow$-nak a (k, ρ)-hoz tartozó ábrázolását a következőképpen kapjuk. A Hilbert-tér legyen

$$\mathcal{H}^{k,\rho} := \left\{ \psi \colon \Omega(k) \to \mathcal{H}^\rho_{G(k)} \;\middle|\; \psi \text{ mérhető}, \quad \int_{\Omega(k)} \langle \psi(p), \psi(p) \rangle^\rho_{G(k)} \, \mathrm{d}\omega_k(p) < \infty \right\},$$

ezen a skalárszorzás legyen

$$\langle \psi, \phi \rangle^{k,\rho} := \int_{\Omega(k)} \langle \psi(p), \phi(p) \rangle^\rho_{G(k)} \, \mathrm{d}\omega_k(p),$$

és a $T(\Lambda, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ -hoz tartozó $U^{k,\rho}(\Lambda, a)$ ábrázoló operátor pedig

$$\left(U^{k,\rho}(\Lambda, a)\, \psi \right)(p) := e^{ip_\mu a^\mu} \, D^{k,\rho}(W_k(\Lambda, p))\, \psi(\Lambda^{-1} p).$$

Az így kapott ábrázolások mind irreducibilis untitérek. Egy (k, ρ)-hoz és egy (k', ρ')-höz tartozó ábrázolások akkor és csak akkor ekvivalensek, ha $\rho = \rho'$ és k ugyanazon a tömeghéjon van, mint k' (azaz $\exists \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, hogy $k = \Lambda k'$). És a $\mathcal{P}_+^\uparrow$ összes irreducibilis unitér ábrázolása előáll ilyen alakban.

Minket csak a fizikailag is releváns, és az egyrészecske ábrázolások érdekelnek. Fizikailag csak az (a) és (c) esetek relevánsak, azaz amikor olyan tömeghéjat veszünk, ami a jövőben van. Azok az egyrészecske ábrázolások, amelyekre $\mathcal{H}^{\rho}_{G(k)}$ véges dimenziós, azaz amelyekben a kiscsoport ábrázolása véges dimenziós (mert ekkor a belső szabadsági fokok száma véges).

Ha pozitív tömegű tömeghéjat választunk, akkor a kiscsoport az $SO(3)$, aminek minden irreducibilis ábrázolása véges dimenziós, tehát ez nyerő eset. Ha a fénykúpot (nulla tömeg) választjuk, akkor már más a helyzet. Itt az $ISO(2)$-nek csak az olyan ábrázolásai jók, amelyekben a két eltolás generátora nulla. Ekkor viszont $\rho \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ lehet. Ebben az esetben ρ a helicitást jelenti. Nulla tömegű esetben lehetnek külön pozitív, külön negatív helicitású állapotok, egymástól függetlenül.

Tehát az irreducibilis, fizikailag is releváns egyrészecske ábrázolásokat két paraméterrel lehet egyértelműen jellemezni: tömeg és spin/helicitás:

$$\left(m > 0, j \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}\right), \qquad \left(m = 0, \sigma \in \frac{\mathbb{Z}}{2}\right).$$

A Casimir-operátorok értékei:

$$\begin{aligned}
\left(m > 0, j \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}\right): &\qquad P^\mu P_\mu = m^2, \qquad W^\mu W_\mu = m^2 j(j+1) \\
\left(m = 0, \sigma \in \frac{\mathbb{Z}}{2}\right): &\qquad P^\mu P_\mu = 0, \qquad W^\mu W_\mu = 0, \quad \text{de} \quad W^\mu = \sigma P^\mu.
\end{aligned}$$

A $\mathcal{H}^{k,\rho}$-ból Fourier-transzformációval kapjuk meg az adott spinű/helicitású szabad Dirac-egyenletet kielégítő megoldásokat. Legyen $\Psi_{p^\mu,i}$ olyan, hogy

$$P^\mu \Psi_{p^\mu,i} = p^\mu \Psi_{p^\mu,i},$$

azaz sajátvektora az impulzus operátornak p^μ sajátértékkel. Ennek egy $U(\Lambda) := U(\Lambda, 0)$-val vett transzformáltja is sajátvektora a P^μ-nek, méghozzá $(\Lambda p)^\mu$ sajátértékkel. Az $U(\Lambda)$-val vett transzformáltja

$$U(\Lambda)\Psi_{p,i} = \frac{N(p)}{N(\Lambda p)} \sum_j D_{ij}(W(\Lambda, p))\, \Psi_{\Lambda p, j},$$

ahol $N(p)$ és $N(\Lambda p)$ normálási faktorok.

4. Tükrözések

A fentebb definiált $\mathcal{P}$ és $\mathcal{T}$ ábrázoló operátorai legyenek

$$\mathsf{P} := U(\mathcal{P}, 0), \qquad \mathsf{T} := U(\mathcal{T}, 0),$$

úgy, hogy minden $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ -ra

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\, U(\Lambda, a)\, \mathsf{P}^{-1} &= U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a) \\
\mathsf{T}\, U(\Lambda, a)\, \mathsf{T}^{-1} &= U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a)
\end{aligned}$$

teljesül. A generátorok transzformációja:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P} i J^{\rho\sigma} \mathsf{P}^{-1} &= i \mathcal{P}_\mu{}^\rho \mathcal{P}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, \\
\mathsf{P} i P^{\rho} \mathsf{P}^{-1} &= i \mathcal{P}_\mu{}^\rho P^{\mu}, \\
\mathsf{T} i J^{\rho\sigma} \mathsf{T}^{-1} &= i \mathcal{T}_\mu{}^\rho \mathcal{T}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}, \\
\mathsf{T} i P^{\rho} \mathsf{T}^{-1} &= i \mathcal{T}_\mu{}^\rho P^{\mu},
\end{aligned}$$

Ennek következményeként P unitér, T antiunitér kell, hogy legyen.

A felhasított generátorok transzformáltjai:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\,\mathbf{J}\,\mathsf{P}^{-1} &= +\mathbf{J} \\
\mathsf{P}\,\mathbf{K}\,\mathsf{P}^{-1} &= -\mathbf{K} \\
\mathsf{P}\,\mathbf{P}\,\mathsf{P}^{-1} &= -\mathbf{P} \\
\mathsf{T}\,\mathbf{J}\,\mathsf{T}^{-1} &= -\mathbf{J} \\
\mathsf{T}\,\mathbf{K}\,\mathsf{T}^{-1} &= +\mathbf{K} \\
\mathsf{T}\,\mathbf{P}\,\mathsf{T}^{-1} &= -\mathbf{P} \\
\mathsf{P}\,H\,\mathsf{P}^{-1} &= \mathsf{T}\,H\,\mathsf{T}^{-1} = H
\end{aligned}
$$

Az egyrészecske-állapotokon történő ábrázolódásuk:
Ha $m > 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\Psi_{p,i} &= \eta\Psi_{\mathcal{P}p,i}, \\
\mathsf{T}\Psi_{p,i} &= \zeta(-1)^{j-i}\Psi_{\mathcal{P}p,-i}.
\end{aligned}
$$

η az ún. belső paritás, ez a részecskére jellemző. j a részecskének a spin típusa, i pedig az állapot spinjének harmadik komponense. Mivel T antiunitér, így ζ-nak nincs fizikai jelentése.
Ha $m = 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} &= \eta_\sigma e^{\mp i\pi\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}, \\
\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} &= \zeta_\sigma e^{\pm i\pi\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma}.
\end{aligned}
$$

Ha $\mathbf{p}$-nek a második komponense pozitív, akkor a felső előjel érvényesül, ha negatív, akkor az alsó. Mivel a tértükrözés megfordítja a helicitást, ezért ha az elméletet P-invariánssá akarjuk tenni, akkor a σ helicitás mellett a $-\sigma$ helicitást is be kell venni.