1 A téridő topológiai és metrikus tulajdonságai, Einstein-egyenletek és származtatásuk hatás elvekből

Topológikus tér

$(X, \mathcal{T})$ pár *topológikus tér*: $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$ és

- $\forall U_i \in \mathcal{T}(i \in I)$ halmazrendszerre: $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
- $\forall U_i \in \mathcal{T}(i \in I, \text{I véges})$ halmazrendszerre: $\bigcap\limits_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$: nyílt halmazok rendszere.

$(X, \mathcal{T})$ *Hausdorff-tulajdonságú*, ha $\forall p, q \in X(p \neq q) : \exists p \in U_p, q \in U_q$nyílt halmazok, úgy, hogy : $U_p \cap U_q = \emptyset$ Legyen $(U_i)_{i \in I}$ az X nyílt lefedése. Ha $(V_j)_{j \in J}$ az X nyílt lefedése, és $J \subset I$ és $\forall j \in J : V_j \subset U_j$, akkor $(V_j)_{j \in J}$ az $(U_i)_{i \in I}$ *finomítása*. Egy $(U_i)_{i \in I}$ nyílt lefedés *lokálisan véges*, ha $\forall p \in X : \exists p \in W_p(\text{nyílt}) : \{i \in I | W \cap U_i \neq \emptyset\}$ véges. $(X, \mathcal{T})$ *parakompakt*, ha minden nyílt lefedésének létezik véges finomítása.

Lokálisan euklideszi topológikus tér

Legyen $(X, \mathcal{T})$ top. tér. Ha (U, φ, n) olyan hármas, hogy $U \subset X$ nyílt, $n \in \mathbb{N}$ és $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ bijekció, akkor (U, φ, n) *térkép*, melynek dimenziója n. Legyen $(X, \mathcal{T})$ top. tér. $(U_i, \varphi_i, n_i)_{i \in I}$ *atlasz*, ha $\forall i \in I$-re (U_i, φ_i, n_i) térkép, $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X$ és $\forall i, j \in I : n_i = n_j \equiv n$. Ekkor n az atlasz dimenziója. Legyen $(X, \mathcal{T})$ top. tér, A egy n-dimenziós atlasz rajra. Ekkor $(X, \mathcal{T}, A)$ *lokálisan euklideszi topológikus tér*, melynek dimenziója n.

C^k-sokaságok ($k \in \mathbb{N}_0$)

Legyen $(M, \mathcal{T}, A)$ n-dimenziós lokálisan euklideszi, Hausdorff-féle és parakompakt topológikus tér, ahol $A = (U_i, \varphi_i, n_i)_{i \in I}$. $(M, \mathcal{T}, A)$ n-dimenziós C^k-sokaság, ha $\forall i, j \in I, U_i \cap U_j \neq \emptyset$: $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^k-leképezés és az inverze is az. Tétel: mindig van rajta Riemann-metrika (a parakompaktság miatt).

Téridő

(M, g) téridő, ahol M 4 dimenziós sokaság (C^k vagy mondjuk C^∞) és g Lorentz-szignatúrájú $(1, -1, -1, -1)$ metrikus tenzormező M-en (azaz $\forall p \in M : g_p \in T*(M) \circ T*(M)$). Az ált.rel. struktúrájának az a filozófiája, hogy ,,infinitezimálisan" (az érintőtéren) visszaadja a spec.relt. Hausdorff-tulajdonság: kb. azt zárja ki, hogy a téridőnek elágazásai legyenek, vagyis azt biztosítja, hogy a részecskék történeket egyértelműen folytatható legyen. Parakompaktság: ettől van a sokaságon Riemann-metrikus, ill. ettől lehet rajtuk integrálni.

Állítás: adott pontban a fénykú p egyértelműen meghatározza az adott pontbeli metrikát egy szám-szorzó erejéig.

A párhuzamosság fogalmát a kovariáns deriválással fogjuk meg (egy X vektormező párhuzamos, ha $\nabla X = 0$):

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c.$$

Az áltrel koncepciója az, hogy a metrika deriváltja legyen $\nabla g = 0$, vagyis a párhuzamosság fogalom a g-hez illeszkedjen.

A másik koncepció, hogy a ∇ torziója legyen 0 (azaz $\Gamma^b_{ac} = \Gamma^b_{ca}$). Ezt a következőképp lehet indokolni: a szabadesést a geodetikus mozgásnak ($\dot{\gamma}^a \nabla_a \dot{\gamma}^b = 0$) szeretnénk megfeleltetni. Van egy ilyen állítás, hogy ∇ akkor és csak akkor torziómentes, ha geodetikusai egyértelműen meghatározzák. Vagyis, ha azt akarjuk, hogy a gravitációs mező (∇) egyértelműen kimérhető legyen, szabadon eső pontszerű próbatestekkel, akkor $T_\nabla = 0$ kell legyen. Vagyis ha $\nabla g = 0$ és $T_\nabla = 0$, akkor ∇ egyértelmű (ez a *Levi-Civita* kovariáns deriválás). Az egész onnan is kijön, hogy:

$$\delta \int_p^s \sqrt{|g(\gamma(t), \gamma(t))|} \mathrm{d}\tau = 0 \Leftrightarrow \gamma \text{ geodetikus } g\text{-re nézve}$$

Magát a geometriai modellt az Eötvös-mérés szolgáltatja: a gravitációs tömeg egyenlő a tehetetlen tömeggel.

Egy geodetikus esetében felvehetünk lokálisan ilyen illeszkedő koordinátákat (ábra). Ekkora metrika koordinátái Minkowski-alakúak és a Christoffelek nullák a görbedarab mentén. Ez formalizálja az ekvivalencia-elvet: nem tudunk különbséget tenni aközött, hogy magunkrahagyatottan lebegünk az űrben vagy hogy szabadon esünk egy gravitáló test felé. Az áltrel egy másik koncepciója az, hogy az órák ketyegési üteme nem érzékeny a múltjukban bekövetkezett gyorsulásokra. Két órát (pl. H-atomot) szabadon hagyünk esni együtt, ekkor ugyanolyan a ketyegésük (gyk. spektrumuk). Szétválasztjuk, megutaztatjuk, majd újra összehozzuk őket és hagyjuk szabadon esni. Ekkor szintén ugyanolyan lesz a spektrumuk.

Metrika megadása: tipikusan valamilyen illeszkedő koordinátarendszer bázisában, amit előzőleg úgy választunk, hogy illeszkedjen a fizikai problémához.

Vákuum Einstein-egyenlet legkisebb hatás elvéből

Legyen

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1.6 \cdot 10^{-35}\mathrm{m}$$

a *Planck-hossz.* $K \subset M$ kompakt, hogy nincs sima peremes részsokaság (???). Ekkor

$$S_k(g) := \int K \frac{1}{l_p^2} R(g) \mathrm{d}V(g)$$

az Einstein-Hilbert hatás. Itt választva lett egy irányítás és $\mathrm{d}V(g)$ a g-hez tartozó adott irányításnak megfelelő kanonikus térfogati forma: $\mathrm{d}V(g) = \sqrt{-\det[g]}\mathrm{d}x^0$