Differenciál-egyenletek ZH

2004. december 15.

1. Vegyük az alábbi differenciál-egyenletet!

   $$(x+1)y'' + xy' - y = 2(x+1)^2,\ y(0) = y(1) = 0$$

   (a) Határozzuk meg az egyszerűsített, $(ry')' + qy = h$-nak megfelelő alakot! **(2 pont)**

   (b) Keressük meg a homogén egyenlet egy egyszerű megoldását, és ebből számoljunk ki egy másik, az előbbitől lineárisan független megoldást a Wronski-determináns segítségével! **(3 pont)**

   (c) Keressük meg azokat az u_1, u_2 függvényeket, amelyek megoldásai a homogén egyenletnek, és igazak rájuk az $u_1(0) = u_2(1) = 0$, $u_1'(0) = u_2'(1) = 1$ feltételek! **(3 pont)**

   (d) Számoljuk ki az egyenlet Green-függvényét! **(4 pont)**

2. Vegyük az $y'' + y' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ Sturm-Liouville-problémát!

   (a) Igazoljuk, hogy a fenti differeciál-egyenletnek csak bizonyos λ értékekre van a triviálistól ($y = 0$) különböző megoldása, és hogy ezen λ értékek halmaza azonos számosságú a természetes számokéval! **(3 pont)**

   (b) Igazoljuk, hogy adott λ értékhez csak egy lineárisan független megoldás tartozik, és adjunk meg minden λ értékhez egy, az egyenlethez tartozó kanonikus skalárszorzatra nézve egyre normált megoldást! **(3 pont)**

   (c) Igazoljuk, hogy a megoldások ortogonális függvényrendszert alkotnak az egyenlethez tartozó kanonikus skalárszorzatra nézve! **(4 pont)**

3. Oldjuk meg az alábbi diffegyenlet a Laplace-transzformáció segítségével! (**6 pont**)

   $$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 3\sin(-2x),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

4. A Hermite-polinomokat definiáló egyenlet a következő:

   $$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

   (a) Határozzuk meg a általános megoldások Taylor-sorának együtthatóira vonatkozó rekurzív egyenletet! **(2 pont)**

   (b) Igazoljuk, hogy a

   $$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{2^k k!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

   polinomok együtthatói megoldásai a fenti rekurzív egyenletnek! **(4 pont)**

   (c) Az előbbi explicit formula segítségével igazoljuk a

   $$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

   $$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

   rekurzív összefüggéseket! **(6 pont)**