1. Határozzuk meg az alábbi szétválasztható, vagy arra visszavezethető differenciálegyenletek összes megoldását! (4×2 pont)

   (a) $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}\, y'$

   (b) $(x^2 - y(x)x^2)y'(x) + y^2(x) + xy^2(x) = 0$

   (c) $y' = \dfrac{1}{2x+y}$

   (d) $y' = \sqrt{y-2x}$

2. Határozzuk meg az alábbi, megadott típusú differenciálegyenletek összes megoldását! (5×3 pont)

   (a) $y' + \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{x^3}y^3$, Bernoulli

   (b) $y' - 2y = x^2 + 2\mathrm{e}^x \sin(x)$, inhomogén lineáris

   (c) $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$, Riccatti, $y_1(x) \sim \dfrac{1}{x}$ alakú mo.-sal

   (d) $x^2 + 2xy - y^2 + (x^2 - 2xy - y^2)y' = 0$, egzakt

   (e) $y + 1 - (xy + y^2 + y + 1)y' = 0$, egzakttá tehető

3. Adjunk meg differenciálegyenletet az alábbi fizikai problémákhoz!

   (a) $\frac{v^2}{\lambda}$ nagyságú, sebességgel ellentétes irányú közegellenállással eső test (1 pont)

   (b) rádióaktív bomlás, ha az időegységenkénti bomlások száma arányos a még meglévő magok számával (1 pont)

   (c) asztallapról lecsúszó kötél, ha a súrlódás arányos a még fentlévő részre ható nyomóerővel, a gravitációs erő pedig a már lógó rész tömegével (2 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek összes megoldását!

   (a) $2x^3 - 135y^3 + 81xy^2y' = 0$ (3 pont)

   (b) $x - 2y - 1 + (2x - y + 1)y' = 0$ (4 pont)

   (c) $xy' + y(x\mathrm{ctg}x + 1) = \mathrm{ctg}x$ (3 pont)

   (d) $(1-x^2)y' + xy + xy^2 = 2x$ (5 pont)

   (e) $\dfrac{2x-3y}{y} + \dfrac{4y^2-x^2}{y^2}y' = 0$ (4 pont)

   (f) $y' = y\mathrm{tg}x - \dfrac{1}{\cos x}$ (4 pont)

5. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek megoldásának hatványsorát az együtthatókra vonatkozó rekurziós formula segítségével, és határozzuk meg az első öt együtthatót!)

   (a) $y'' - xy' + 2y = 0$, $x = 0$ (5 pont)

   (b) $y'' + xy' + (2x-1)y = 0$, $x = -1$k.f.: $y(-1) = 2$, $y'(-1) = -2$ (6 pont)

6. Találjunk egy egyszerű partikuláris megoldást az alábbi differenciálegyenlet homogén változatához, majd adjuk meg a teljes egyenlet összes megoldását az Abel-azonosság (Wronski-féle módszer) segítségével! (7 pont)

   $$x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x$$