Másodrendű lineáris egyenletek hatványsor alakú megoldásai

1) Tekintsük a következő, egy $w(z)$ komplex függvényre vonatkozó homogén másodrendű kezdeti érték problémát:

$$w''(z) = p_1(z)w'(z) + p_0(z)w'(z), \qquad w(0) = a, \quad w'(0) = b,$$

ahol p_1 és p_0 egyes izolált $z_0, z_1, ... \in \mathbb{C}$ pontok kivételével mindenütt analitikus komplex függvények.

2) Tegyük fel először, hogy a $z = 0$ pont a differenciálegyenlet *reguláris pontja*, azaz ebben a pontban p_1 és p_0 analitikus. A 0 pont kiválasztása nem jelent megszorítást, mert eltolással tetszőleges pont a 0-ba vihető. Ez a későbbiekre is vonatkozik. Tegyük fel továbbá, hogy w is analitikus a 0 pontban. Ekkor a differenciálegyenletből megkaphatjuk $w''(0)$-t kifejezve p_1 és p_0 0-beli értékével és a, b-vel, majd véve a differenciálegyenlet deriváltját megkaphatjuk $w'''(0)$-t, és így tovább: w összes 0-beli deriváltja kifejezhető a-val, b-vel és p_1 és p_0 0-beli deriváltjaival. Például:

$$w''(0) = p_1(0)w'(0) + p_0(0)w(0) = bp_1(0) + ap_0(0)$$

$$\begin{aligned} w'''(0) &= p_1(0)w''(0) + p_1'(0)w'(0) + p_0(0)w'(0) + p_0'(0)w(0) = \\ &= b[p_1^2(0) + p_1'(0) + p_0(0)] + a[p_1(0)p_0(0) + p_0'(0)] \end{aligned}$$

Megmutatható, hogy az így előálló

$$w(z) = w(0) + w'(0)z + \frac{1}{2}w''(0)z^2 + \frac{1}{3!}w'''(0)z^3 + ...$$

sor konvergens, és így a differenciálegyenlet megoldását adja a 0 egy környezetében. Ebből a megoldás egyértelműsége miatt az is következik, hogy $w(z)$ valóban analitikus a 0 pontban, továbbá hogy w csak olyan pontokban lehet nem analitikus, amelyekben p_1 vagy p_0 sem az. Az előbbiek alapján nem nehéz ellenőrizni, hogy a $w(z)$ megoldás előlállt (a nulla egy környezetében) a

$$w(z) = aw_1(z) + bw_2(z)$$

alakban, ahol w_1 és w_2 az $a = 1, b = 0$ illetve a $a = 0, b = 1$ kezdeti értékekhez tartozó megoldások,

$$w_1(z) = 1 + \frac{1}{2}p_0(0)z^2 + \frac{1}{3!}[p_1(0)p_0(0) + p_0'(z)]z^3 + ...$$

$$w_2(z) = z + \frac{1}{2}p_1(0)z^2 + \frac{1}{3!}[p_1^2(0) + p_1'(0) + p_0(0)]z^3 + ...$$

A w_1 és w_2 lineárisan független megoldások, $w(z) = aw_1(z) + bw_2(z)$ az általános megoldás.

Gyakran gyorsabb úgy számolni, hogy a differenciálegyenletbe beírjuk a

$$w(z) = w_0 + w_1z + w_2z^2 + w_3z^3 + ...$$

kifejezést, valamint p_1 és p_0 helyébe is a hasonló Taylor sort, és a $w_0, w_1, w_2...$ együtthatókat abból a feltételből határozzuk meg, hogy z minden hatványának együtthatója nulla legyen.

3) Tegyük most fel, hogy p_1 vagy p_0 (vagy mind a kettő) szinguláris a nulla pontban. Ha például p_1-nek pólusa van, p_0 pedig analitikus, akkor a diffferenciálegyenletnek (meghatározott kezdeti feltétel nélkül) létezik egy analitikus megoldása, amelyet lényegében a fenti módon ki lehet számolni. A Wronski-féle módszerrel elő lehet állítani egy másik lineárisan független megoldást, azonban belátható, hogy ez

nem analitikus a nulla pontban, hanem elágazási pontja vagy pólusa van, ha p_1-nek egyszeres pólusa van 0-ban, illetve lényeges szingularitása van, ha p_1-nek magasabb rendű pólusa van.

Jól kidolgozott elmélete van annak az esetnek, amikor egy szinguláris pontban (mely az egyszerűség kedvéért legyen a nulla) a differenciálegyenlet megoldásai analitikusak, vagy elágazási pontjuk vagy pólusuk van. Az ilyen szinguláris pontokat *reguláris szinguláris pontoknak* nevezzük. Tegyük fel tahát, hogy a nulla egy ilyen reguláris szinguláris pont. Belátható, hogy ilyenkor a p_1 és p_0 a következő alakú:

$$p_1(z) = \frac{r(z)}{z}, \qquad p_0(z) = \frac{s(z)}{z^2},$$

ahol r és s a 0-ban analitikus függvények. A következőkben tehát ezzel az esettel foglalkozunk.

3a) Abban a speciális esetben, amikor az r és s függvények konstansok, az általános megoldás

$$w(z) = A_1 z^{\lambda_1} + A_2 z^{\lambda_2},$$

ahol A_1 és A_2 tetszőlges állandók, λ_1 és λ_2 pedig a következő másodfokú *indexegyenlet* (különböző) gyökei:

$$\lambda(\lambda - 1) - \alpha\lambda - \beta = 0,$$

ahol $r(z) = \alpha$, $s(z) = \beta$. Ez behelyettesétéssel könnyen ellenőrizhető. Ha esetleg $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy az általános megoldás

$$w(z) = z^{\mu}(A_1 + A_2 \log z).$$

3b) Az általános esetben keressük a megoldást

$$w(z) = z^{\lambda}(w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + ...), \qquad w_0 \neq 0 \tag{1}$$

alakban. Fejtsük sorba r-et és s-et is: $r(z) = r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + ...$, $s(z) = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + ...$, és helyettesítsük be ezeket a sorokat a differenciálegyenletbe. Így a következő egyenletek adódnak $w_0, w_1, w_2 ...$-re:

$$w_0[\lambda(\lambda - 1) - \lambda r_0 - s_0] = 0 \tag{2}$$

$$w_1[(\lambda + 1)\lambda - (\lambda + 1)r_0 - s_0] = (\lambda r_1 + s_1)w_0 \tag{3}$$

$$w_2[(\lambda + 2)(\lambda + 1) - (\lambda + 2)r_0 - s_0] = (\lambda r_2 + s_2)w_0 + [(\lambda + 1)r_1 + s_1]w_1 \tag{4}$$

$$...$$

$$w_n[(\lambda + n)(\lambda + n - 1) - (\lambda + n)r_0 - s_0] = (\lambda r_n + s_n)w_0 + ... + [(\lambda + n - 1)r_1 + s_1]w_{n-1}. \tag{5}$$

$w_0 \neq 0$ miatt az első egyenletből az adódik, hogy λ gyöke az *indexegyenletnek*:

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda r_0 - s_0 = 0.$$

Ha ennek az egyenletnek két különböző gyöke van, és a gyökök különbsége nem egész szám, akkor a (3)-(5) egyenletekben λ helyére beírva az egyik illetve a másik gyököt két lineárisan független $w(z)$ megoldás állítható elő a 0 pont egy környezetében. Belátható, hogy a két sor, amit a leírt módszerrel kapunk egyenletesen konvergens a 0 egy környezetében.

3c) Ha $\lambda_1 = \lambda_2$, akkor az (3)-(5) egyenletekből csak egy $w_1(z)$ megoldást kapunk, egy másik lineárisan független $w_2(z)$ megoldás a Wronski-féle módszerrel kapható meg. Ezt a módszert alkalmazva nem nehéz belátni, hogy w_2 a következő alakú:

$$w_2(z) = A w_1(z)[\log z + h(z)], \tag{6}$$

ahol A tetszőleges konstans, $h(z)$ analitikus a 0 pontban. Miután w_1-et meghatároztuk, $h(z)$-t úgy határozhatjuk meg, hogy h-t hatványsor alakban ($h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + ...$), w_1-et pedig a (1) alakban beírjuk a (6) formulába, ezt pedig a differenciálegyenletbe, amelybe r-et és s-et is hatványsor alakban írjuk be. Így h_0, h_1, h_2...-re kapunk megoldható egyenleteket.

3d) Ha $\lambda_1 = \lambda_2 + n$, ahol n pozitív egész szám, akkor a (3)-(5) egyenletek csak $\lambda = \lambda_1$ esetén adnak egy $w_1(z)$ megoldást, másik lineárisan független megoldást most is a Wronski-féle módszerrel kaphatunk. Ezt alkalmazva nem nehéz belátni, hogy w_2 a következő alakú:

$$w_2(z) = A[\gamma w_1(z) \log z + z^{\lambda_2} h(z)],$$

ahol A tetszőleges konstans, $h(z)$ analitikus a 0 pontban, γ pedig egy fix konstans (nulla is lehet), melyet a h kifejtési együtthatóival együtt lehet meghatározni. Ettől eltekintve h_0, h_1, h_2... meghatározása az előző esetben leírthoz hasonlóan történik.

3e) Definíció szerint egy $w(z)$ függvény végtelenbeli viselkedésén a $w(1/z)$ függvény nulla pontbeli viselkedését értjük. Beszélhetünk végtelenbeli szinguláris pontról is, ez a differenciálegyenletben a $z = 1/u$ transzformáció végrehajtásával 0 pontbelivé tehető.