1. Határozzuk meg az alábbi szétválaszthatóra visszavezethető differenciálegyenletek összes megoldását! **(4×2 pont)**

   (a) $(x^2 - 4xy - y^2)dx - (y^2 + 2xy + 2x^2)dy = 0$

   (b) $(8x + y + 25)dx + (7x - 16y + 140)dy$

   (c) $y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (d) $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathrm{y})^2\mathrm{y}' = \mathrm{a}^2,\ \mathrm{a} \in \mathbb{R}$

2. Határozzuk meg az alábbi, megadott típusú differenciálegyenletek összes megoldását! **(5×2 pont)**

   (a) $(x^1 - 1)y' - y(2x - 3y) = 0$, Bernoulli

   (b) $x^2y' + xy = x^2 + x + 1$, inhomogén lineáris

   (c) $xy' - xy^2 - (2x^2 + 1)y - x^3 = 0$, Riccatti, $y_1(x) \sim x$ alakú mo.-sal

   (d) $(y\cos^2 x - \sin x)y' - (y\sin x + 1)y\cos x = 0$, egzakt

   (e) $(x^3 + y^4) + 8xy^3y' = 0$, egzakttá tehető

3. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek összes megoldását! **(5×3 pont)**

   (a) $y' + y^2\sin x = 2\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

   (b) $x^2(2y' - 1) - x^2y = 0$

   (c) $(1 - x^2)y' + 1 - xy = 0$

   (d) $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$

   (e) $x(y' + xy^2) = y$

4. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek megoldásának hatványsorát az együtthatókra vonatkozó rekurziós formula segítségével, és határozzuk meg az első öt együtthatót! **(2×4 pont)**

   (a) $(x^2 + 1)y'' - xy' + 3y = x^3$, k.f.:$y(0) = a,\ y'(0) = b$

   (b) $y'' + (x - 1)y = \mathrm{e}^x$, k.f.:$y(-1) = 2,\ y'(-1) = -2$

5. Oldjuk meg az alábbi kezdeti-érték problémát az Abel-azonosság illetve a paraméterek variációjának módszere segítségével! **(5 pont)**

$$(x + 1)y'' + xy' - y = 2(x + 1)^2,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

6. Vegyük az alábbi differenciál-egyenletet!

$$(x^2-1)y''+2xy'+(1-x^2)^{-1}y=-(x+1)^{1/2},\ y'(0)=y(1)=0$$

(a) Keressük meg a homogén egyenlet egy egyszerű megoldását, és ebből számoljunk ki egy másik, az előbbitől lineárisan független megoldást a Wronski-determináns segíségével! **(3 pont)**

(b) Keressük meg azokat az u_1, u_2 függvényeket, amelyek megoldásai a homogén egyenletnek, és igazak rájuk az $u_1(0)=u_2(1)=0$, $u_1'(0)=u_2'(1)=1$ feltételek, majd számoljuk ki az egyenlet Green-függvényét! **(3 pont)**

(c) Számoljuk ki így a fenti kezdeti-érték probléma megoldását! **(3 pont)**

7. Vegyük az $y''+a^2y'+(\lambda-1)y=0$, $y(0)=0$, $y(2\pi)=0$ Sturm-Liouville-problémát!

(a) Igazoljuk, hogy a fenti differeciál-egyenletnek csak bizonyos λ értékekre van a triviálistól ($y=0$) különböző megoldása, és hogy ezen λ értékek halmaza azonos számosságú a természetes számokéval! **(3 pont)**

(b) Igazoljuk, hogy adott λ értékhez csak egy lineárisan független megoldás tartozik, és adjunk meg minden λ értékhez egy, az egyenlethez tartozó kanonikus skalárszorzatra nézve egyre normált megoldást! **(3 pont)**

(c) Igazoljuk, hogy a megoldások ortogonális függvényrendszert alkotnak az egyenlethez tartozó kanonikus skalárszorzatra nézve! **(3 pont)**

8. Oldjuk meg az alábbi diffegyenlet-rendszert a Laplace-transzformáció segíségével! (**6 pont)**

$$\begin{aligned} w''+y+z &= -1\\ w+y''-z &= 0\\ w'-2y+z'' &= 0 \end{aligned}$$

$$w(0)=0,\ w'(0)=,\ z(0)=1,\ z'(0)=0,\ y(0)=0$$

9. A Laguerre-polinomokat definiáló egyenlet a következő ($\alpha\in\,]-\infty,-1[$ és $n\in\mathbb{N}$ esetén):

$$x\frac{d^2L_n^{(\alpha)}(x)}{dx^2}+(\alpha+1-x)\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx}+nL_n^{(\alpha)}(x)=0$$

(a) Határozzuk meg a általános megoldások Taylor-sorának együtthatóira vonatkozó rekurzív egyenletet, és igazoljuk, hogy a

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}$$

polinomok együtthatói megoldásai a fenti rekurzív egyenletnek! **(3 pont)**

(b) Az előbbi explicit formula segítségével igazoljuk a

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)=(2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)(x)$$

rekurzív összefüggést! **(3 pont)**

(c) A Laguerre-polinomok generátor-függvénye az alábbi:

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{xt}{t-1}\right)$$

Mutassuk meg, hogy fenti függvény Taylor-együtthatói (n!-sal szorozva) éppen a Laguerre-polinomok ($n<5$-re)! **(3 pont)**