Differenciál-egyenletek gyakorlat beadandó feladat

A transzport egyenlet a következő:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Ennek van gauss-függvény alakú megoldása, azaz a

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)}\ \exp\left(-\frac{(x-x_0(t))^2}{2\sigma(t)^2}\right)$$

időtől függő középonttal ($x_0(t)$) és szélességgel ($\sigma(t)$) definiált függvény megoldja a fenti egyenletet, ha a középpont és a szélesség időfüggése megfelelően van megválasztva. Ezért tehát ha a kezdeti feltétel gauss alakú, az időben továbbfejlesztve is az marad.

1. Vizsgáljuk meg, milyen időfüggése kell hogy legyen $\sigma(t)$-nek és $x_0(t)$-nek, hogy a fenti megoldás valóban megoldás legyen! (Segítség: $x_0'(t) = v$ és $\sigma(t)\sigma'(t) = \alpha$ jön ki.)

2. Vegyük a $[0, 20]$ nyílt intervallumot! Ezen generáljunk egy $\sigma(t = 0) = 2$, $x_0(t = 0) = 3$ formájú gauss függvényt, mint kezdeti feltételt! Az diszkretizáció olyan legyen, hogy $\Delta x = 0.1$ legyen.

3. Ezt az egzakt megoldást számoljuk ki a későbbi időpillanatokra is, $t \in [0, 20]$ intervallumot 400 részre osztva, azaz $\Delta t = 0.05$-öt választva!

4. Ezek után a kezdeti feltételt fejlesszük tovább az időben a tanult numerikus módszerekkel, amelyeknek a leírása szerepel a „Jegyzet-féleségben”, illetve órán is volt. Az egyenlet paraméterei a következők legyenek: $v = 0.13$, $\alpha = 0.05$. Konkrétan a következő módszereket, vagy inkább módszer-kombinációkat próbáljuk ki:

#	konvekciós rész	diffúziós rész
(a)	FTCS	FTCS
(b)	Upwind	FTCS
(c)	Leapfrog	Richardson
(d)	MacCormack	FTCS

   A program úgy nézzen ki, hogy újrafordítás nélkül (!) le tudjon futni a fenti módszerek bármelyikét választva, és a paraméterek (α, v, Δt, Δx) változtatása esetén is fordítás nélkül újra lehessen futtatni a szimulációt.

5. A kapott eredmények pontosságát vizsgáljuk meg a gyakorlaton tanult módszerrel, azaz határozzuk meg a szimulált és az egzakt megoldás különbségét minden egyes időpillanatra a 4 (a)-(d) módszerekre, és ábrázoljuk gnuplotban.

6. Készítsünk animációkat a négy különöbő megoldási módszerrel készült megoldásokról, mindegyiken ábrázolva az egzakt megoldást is!

7. Vizsgáljuk meg a gyakorlaton tanult módszerrel, hogy a megoldási módszerek stabilak-e a konkrét paraméterértékek esetén, és vessük ezt össze a hiba időbeli növekedésével (lásd 5. feladat) és a megoldás időfejlődésével (lásd 6. feladat)!

8. Használjuk a gyakorlaton tanult programozási módszereket, úgy, mint: fájlba írás, fájlból olvasás, a paraméterek és egyéb értékek fájlból olvasása, osztályok használata, szubrutinok használata (ez különösen fontos, hiszen a négy különböző numerikus módszerhez használandó „kiszámoló program” más csak a négy esetben, minden más lehet azonos), dinamikus memóriakezelés (azaz `double * x` és `x = new double[Nx]` és nem `double x[100]...`), „argumentumos” `main` függvény, és a többi...

A pontozás:

Feladat	Pont
Egzakt megoldás megtalálása	5 pont
Egzakt megoldás beprogramozása	5 pont
A numerikus módszerek helyes beprogramozása	20 pont
Helyes paraméterek használata	5 pont
Animációk helyes elkészítése	10 pont
Stabilitás vizsgálata (7. feladat)	10 pont
Megfelelő programozási technika	15 pont
Összesen	70 pont