1. Lineáris másodrendű differenciálegyenletek

1.1. A megoldások elmélete

A differenciálegyenlet általános alakban a következő:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x). \tag{1}$$

Vezessük be az

$$r(x) = \exp \int^x p(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2}$$

mennyiséget; a határozatlan integrálással bejövő konstans $r(x)$-ben csak egy számszorzót jelent, ami az (1) egyenlet linearitása miatt lényegtelen. Az egyenletet $r(x)$-szel megszorozva az

$$[r(x)y'(x)]' + s(x)y(x) = h(x) \tag{3}$$

önadjungált alakot kapjuk, ahol $s(x) = r(x)q(x)$ és $h(x) = r(x)g(x)$, ugyanis

$$\begin{aligned}[r(x)y'(x)]' &= r(x)y''(x) + r'(x)y'(x) = \\ &= r(x)y''(x) + p(x)r(x)y'(x) = \\ &= r(x)[y''(x) + p(x)y'(x)].\end{aligned} \tag{4}$$

A linearitás miatt az (1) egyenlet megoldása

$$y(x) = A_1 z_1(x) + A_2 z_2(x) + y_1(x) \tag{5}$$

alakban áll elő, ahogy z_1 és z_2 a megfelelő homogén ($g(x) \equiv 0$) egyenlet lineárisan független megoldásai, $y_1(x)$ pedig az eredeti (inhomogén) egyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldása.

Ha z_1 és z_2 lineárisan összefüggő megoldások, akkor (definíció szerint) léteznek olyan B_1 és B_2 konstansok, melyekkel

$$B_1 z_1(x) + B_2 z_2(x) \equiv 0 \qquad \text{és emiatt} \tag{6}$$

$$B_1 z_1'(x) + B_2 z_2'(x) \equiv 0. \tag{7}$$

Ez minden x pontban egy homogén lineáris egyenletrendszer B_1-re és B_2-re; pontosan akkor létezik nemtriviális megoldása, ha a determinánsa, ami adott esetben éppen a Wronsky-determináns, eltűnik:

$$\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} = W\{z_1(x), z_2(x)\} = 0. \tag{8}$$

A (3) és az (5) egyenletek alapján

$$\big\{[r(x)z_1'(x)]' + s(x)z_1(x)\big\}z_2(x) = 0 \tag{9}$$

$$\big\{[r(x)z_2'(x)]' + s(x)z_2(x)\big\}z_1(x) = 0, \tag{10}$$

melyek különbségét képezve (az x-függés jelölését elhagyva) az

$$\begin{aligned}(rz_1')z_2 - (rz_2')' &= r'z_1'z_2 + r'z_1''z_2 - r'z_1z_2' - r'z_1z_2'' = \\ &= -[r(z_1z_2' - z_1'z_2)]' = -(rW\{z_1, z_2\})' = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

azaz $rW\{z_1, z_2\} = C$ összefüggést kapjuk, melyből

$$z_1^2 \left[\frac{z_2}{z_1}\right]' = z_2' z_1 - z_2 z_1' = W\{z_1, z_2\} = \frac{C}{r} \quad \text{miatt} \tag{12}$$

$$\boxed{z_2(x) = C z_1(x) \int^x \frac{\mathrm{d}\xi}{z_1^2(\xi) r(\xi)}} \tag{13}$$

következik. Mivel $r(x)$ meghatározható közvetlenül az (1) differenciálegyenletből, a (13) egyenlőség lehetőséget ad arra, hogy a homogén egyenlet egy megoldásának ismeretében előállítsunk egy tőle független másikat.

A homogén egyenlet két független megoldásának ismeretében az állandók variálásának módszerével már elő tudjuk állítani az inhomogén egyenlet megoldását is. Sajnos az első független megoldás megtalálására nincsen általános módszer, ha az együtthatók nem állandók.

1.2. Green módszere

Tekintsük az

$$[r(x)y'(x)]' + s(x)y(x) = h(x) \qquad y(a) = y_1 \quad y(b) = y_2 \tag{14}$$

egyenletet a megadott peremfeltételekkel! Figyelembe véve a (2) származtatást, ennek csak akkor van értelme, ha $r(x) \neq 0$ a vizsgált intervallum belsejében ($a < x < b$). A peremfeltételeket homogénné tehetjük az

$$y(x) = u(x) + v(x) \qquad v(a) = y_1 \quad v(b) = y_2 \tag{15}$$

helyettesítéssel, ahol $v(x)$ a peremfeltételeknek megfelelő, de egyébként tetszőleges függvény. Egyszerű behelyettesítéssel látható, hogy $u(x)$ ekkor az

$$\begin{gathered}[r(x)u'(x)]' + s(x)u(x) = h(x) - [r(x)v'(x)]' - s(x)v(x) =: k(x) \\ u(a) = 0 \qquad u(b) = 0\end{gathered} \tag{16}$$

probléma megoldása lesz. A peremfeltételek megválasztása tehát az egyenlet inhomogén tagjának megválasztásával egyenértékű!

A továbbiakat egyszerűsíti, ha a $z_1(x)$ és $z_2(x)$ alapmegoldásokról alkalmas D lineáris transzformációval olyan speciális *megoldásbázisra* térünk át, amely teljesíti a bal- illetve jobb oldali peremfeltételeket:

$$u_1(x) = D_{11} z_1(x) + D_{12} z_2(x) \quad \rightarrow \quad u_1(a) = 0 \tag{17a}$$

$$u_2(x) = D_{21} z_1(x) + D_{22} z_2(x) \quad \rightarrow \quad u_2(b) = 0. \tag{17b}$$

Ha a (14) problémában nem y-ra, hanem y'-re vonatkozó peremfeltétel szerepelt volna (vagy esetleg vegyes), akkor alkalmas v választásával az u'-re vonatkozó peremfeltételeket tettük volna homogénné, és most annak megfelelő $u_i' = 0$ megoldásbázist választanánk.

Keressük ezután a (16) inhomogén egyenlet egy

$$u_\mathrm{p}(x) = C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x) \tag{18}$$

partikuláris megoldását az állandók variálásának módszerével! Kapjuk, hogy

$$C_1'(\xi)u_1(\xi) + C_2'(\xi)u_2(\xi) = 0 \tag{19a}$$

$$C_1'(\xi)u_1'(\xi) + C_2'(\xi)u_2'(\xi) = \tfrac{k(\xi)}{r(\xi)}. \tag{19b}$$

A (19) egyenletekből C_1' és C_2' egyértelműen meghatározható, mert az inhomogén lineáris egyenletrendszer determinánsa

$$W(\xi) := \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{vmatrix} = W\{u_1, u_2\} \overset{(17)}{=} W\{z_1, z_2\} \det D \neq 0 \tag{20}$$

a megoldásbázis függetlensége miatt. Azt látjuk tehát, hogy

$$C_1'(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2(\xi) \\ \frac{k(\xi)}{r(\xi)} & u_2'(\xi) \end{vmatrix}}{W(\xi)} = -\frac{u_2(\xi)k(\xi)}{r(\xi)W(\xi)} \tag{21}$$

$$C_2'(\xi) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(\xi) & 0 \\ u_1'(\xi) & \frac{k(\xi)}{r(\xi)} \end{vmatrix}}{W(\xi)} = \frac{u_1(\xi)k(\xi)}{r(\xi)W(\xi)}, \tag{22}$$

s ennek felhasználásával a (16) probléma partikuláris megoldása (18) alapján

$$u_{\mathrm{p}}(x) = -\int^{x} \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)}k(\xi)\mathrm{d}\xi + \int^{x} \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)}k(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{23}$$

alakban írható fel. Megjegyzésre érdemes, hogy a nevező állandó:

$$r(\xi)W(\xi) = r(\xi)W\{u_1, u_2\} \overset{(20)}{=} r(\xi)W\{z_1, z_2\} \det D \overset{(12)}{=} C \det D. \tag{24}$$

Az általános

$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + u_{\mathrm{p}} \tag{25}$$

megoldásban fellépő C_1 és C_2 állandókat a peremfeltételek rögzítik. Vegyük észre azonban, hogy a (23) megoldásban az integrálások alsó határainak megválasztása — mint ahogy ez a partikuláris megoldásokban fellépő határozatlanságokra általában is igaz — éppen C_1 és C_2 beállításának felel meg, hiszen az integrálokból $u_1(x)$ illetve $u_2(x)$ kiemelhető. Legyen tehát

$$u(x) = -\int_{\alpha}^{x} \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)}k(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\beta}^{x} \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)}k(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{26}$$

és állítsuk be az α és β paraméterek értékeit a peremfeltételeknek megfelelően! $u(a) = u(b) = u_1(a) = u_2(b) = 0$ miatt

$$u(a) = \int_{\beta}^{a} \frac{u_1(\xi)u_2(a)}{r(\xi)W(\xi)}k(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \qquad u(b) = -\int_{\alpha}^{b} \frac{u_1(b)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)}k(\xi)\mathrm{d}\xi = 0, \tag{27}$$

melyek nyilvánvalóan a $\beta = a$ és $\alpha = b$ választással teljesíthetők. (26) első tagjában az integrálás határainak felcserélésével így az

$$\boxed{u(x) = \int_x^b \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)} k(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_a^x \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)} k(\xi)\mathrm{d}\xi} \tag{28}$$

eredményt kapjuk, mely a

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{r(\xi)W(\xi)} & a \le x \le \xi \\ \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{r(\xi)W(\xi)} & \xi \le x \le b \end{cases} \tag{29}$$

Green-függvény bevezetésével az

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)k(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{30}$$

tömör alakba írható.

1.3. Példa

Alkalmazzuk Green módszerét az

$$\begin{gathered} xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = (x+1)(\ln x + 1) + 2 + e^{-x} \\ y(e^{-2}) = -1 \qquad y'(1) = 1 \end{gathered} \tag{31}$$

peremérték-problémára! Azonosítjuk a kanonikus alakot paramétereit:

$$p(x) = 2 + \frac{1}{x} \qquad q(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(\ln x + 1) + \frac{2}{x} + \frac{e^{-x}}{x}, \tag{32}$$

majd (2) alapján kiszámoljuk $r(x)$-et:

$$r(x) = \exp\int^x p(\xi)\mathrm{d}\xi = \exp\int^x \left(2 + \frac{1}{\xi}\right)\mathrm{d}\xi = \exp(2x + \ln x) = xe^{2x}, \tag{33}$$

és ennek segítségével már átírhatjuk a (31) egyenletet az

$$[xe^{2x}y']' + (x+1)e^{2x}y = e^{2x}\left[(x+1)(\ln x + 1) + 2 + e^{-x}\right] \tag{34}$$

önadjungált alakba, ahol azonosíthatjuk az $s(x)$ és a $h(x)$ együtthatókat.

A következő lépésben a peremfeltételeket homogénre cseréljük. Az alsó határ értéke e^{-2}, ez arra utal, hogy valami logaritmussal kellene operálni. A két feltétel miatt pedig két paraméterre lesz szükségünk, próbáljuk meg tehát a $v(x) = \alpha \ln x + \beta$ függvényt használni a (16) egyenlet előállítására:

$$v(e^{-2}) = -2\alpha + \beta \overset{!}{=} -1 \qquad v'(1) = \alpha \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1, \tag{35}$$

azaz $v(x) = \ln x + 1$, az új inhomogenitás pedig

$$\begin{aligned} k(x) &= r(x)g(x) - [r(x)v'(x)]' - s(x)v(x) = \\ &= e^{2x}\left[(x+1)(\ln x + 1) + 2 + e^{-x}\right] - 2e^{2x} - (x+1)e^{2x}(\ln x + 1) = \\ &= e^x, \end{aligned}$$

vagyis a transzformáció a probléma

$$[xe^{2x}u']' + (x+1)e^{2x}u = e^x \qquad u(e^{-2}) = u'(1) = 0 \tag{36}$$

egyszerűsödését eredményezte.

A homogén egyenlet megoldását keressük $z_1(x) = e^{\alpha x}$ alakban:

$$x\alpha^2 e^{\alpha x} + (2x+1)\alpha e^{\alpha x} + (x+1)e^{\alpha x} = [x(\alpha+1)^2 + (\alpha+1)]e^{\alpha x} \overset{!}{=} 0, \tag{37}$$

tehát $\alpha = -1$, azaz $z_1 = e^{-x}$. A lineárisan független másik megoldás (13) alapján:

$$z_2(x) = Ce^{-x} \int^x \frac{\mathrm{d}\xi}{e^{-2\xi}\xi e^{2\xi}} = Ce^{-x}\ln x, \tag{38}$$

vagyis $C = 1$ választással $z_2(x) = e^{-x}\ln x$. De nekünk speciális megoldásbázis kell:

$$u_1(e^{-2}) = \alpha z_1(e^{-2}) + z_2(e^{-2}) = (\alpha - 2)e^{-e^{-2}} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2 \tag{39}$$

$$u_2'(1) = \beta z_1'(1) + z_2'(1) = (1-\beta)e^{-1} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1, \tag{40}$$

tehát a megfelelő bázis:

$$u_1(x) = 2z_1(x) + z_2(x) = e^{-x}(2 + \ln x) \tag{41}$$

$$u_2(x) = z_1(x) + z_2(x) = e^{-x}(1 + \ln x). \tag{42}$$

A bázisváltás determinánsa

$$\det D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{43}$$

ezért $W\{u_1(\xi), u_2(\xi)\} = W\{z_1(\xi), z_2(\xi)\}$, tehát $r(\xi)W(\xi) = C = 1$ lesz a Green-függvény nevezőjében:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} e^{-x}(2+\ln x)e^{-\xi}(1+\ln\xi) & \text{ha} \quad e^{-2} \le x \le \xi \\ e^{-\xi}(2+\ln\xi)e^{-x}(1+\ln x) & \text{ha} \quad \xi \le x \le 1. \end{cases} \tag{44}$$

Végül elvégezzük a Green-függvény integrálását, ami megadja a (36) transzformált probléma

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-x}(1+\ln x)\int_{e^{-2}}^{x} e^{-\xi}(2+\ln\xi)e^{\xi}\mathrm{d}\xi + e^{-x}(2+\ln x)\int_{x}^{1} e^{-\xi}(1+\ln\xi)e^{\xi}\mathrm{d}\xi = \\ &= e^{-x}(1+\ln x)\int_{e^{-2}}^{x}(2+\ln\xi)\mathrm{d}\xi + e^{-x}(2+\ln x)\int_{x}^{1}(1+\ln\xi)\mathrm{d}\xi = \\ &= e^{-x}\left[x + e^{-2}(1+\ln x)\right] \end{aligned} \tag{45}$$

megoldását. Ebből $v(x) = 1 + \ln x$ visszaadásával kapjuk az eredeti inhomogén peremérték-feladat

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\left[x + e^{-2}(1+\ln x)\right] + 1 + \ln x} \tag{46}$$

megoldását.