Differenciál-egyenletek gyakorlat házi feladatok

9. hét

1. A Legendre polinomokat dfiniáló egyenlet a következő:

$$\big((1-x^2)P_n'(x)\big)' + n(n+1)P_n(x) = 0$$

   (a) Határozzuk meg a általános megoldások Taylor-sorának együtthatóira vonatkozó rekurzív egyenletet!

   (b) Igazoljuk, hogy a

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

   polinomok együtthatói megoldásai a fenti rekurzív egyenletnek!

   (c) Az előbbi explicit formula segítségével igazoljuk az alábbi rekurzív összefüggéseket!

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

$$(1-x^2)P_n'(x) = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x)$$

   (d) A Legendre-polinomok generátor-függvénye a következő:

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

   Vizsgáljuk meg a fenti függvény $t = 0$-ban vett t szerinti Taylor-sorának első négy együtthatóját, és hasonlítsuk össze az első négy Legendre-polinommal (ezeket a 1b-ből vehetjük)!

2. A Csebisev polinomokat dfiniáló egyenlet a következő:

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

   (a) Igazoljuk, hogy $T_n(x) = \cos(n \arccos x))$ megoldása a fenti diffegyenletnek!

   (b) Határozzuk meg a általános megoldások Taylor-sorának együtthatóira vonatkozó rekurzív egyenletet!

   (c) Igazoljuk, hogy a

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

   polinomok együtthatói megoldásai a fenti rekurzív egyenletnek!

   (d) Az előbbi explicit formula segítségével igazoljuk az alábbi rekurzív összefüggéseket!

$$T_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

$$(1-x^2)P_n'(x) = -nxP_n(x) + nP_{n-1}(x)$$

   (e) Igazoljuk, hogy a

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{1}{2})} \sqrt{1-x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left[(1-x^2)^{n-1/2}\right]$$

   függvények megegyeznek a 2c-ben említett polinomokkal!