

Differenciál-egyenletek gyakorlat házi feladatok

8. hét

1. Az alábbi egyenletek közül melyek Sturm-Liouville problémák az $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ határfeltételekkel? Alakítsuk őket a kanonikus Sturm-Liouville-alaknak megfelelően, és határozzuk meg az ebben szereplő függvényeket!

(a) $e^x y'' + e^x y' + \lambda y = 0$

(b) $\left(\frac{1}{x} y'\right)' + (x + \lambda)y = 0$

(c) $xy'' + y' + (x^2 + 1 + \lambda)y = 0$

(d) $(x + 2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0$

2. Oldjuk meg az alábbi Sturm-Liouville-problémákat, és vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e a megoldásokra a gyakorlaton vett állítás négy pontja!

(a) $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y(\pi) = 0$

(b) $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$

(c) $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(2\pi) = 0$

3. Keressük meg a Sturm-Liouville-módszerrel az

$$y'' = \sin(x) \cos(x), y(0) = 0, y(2\pi) = 0$$

egyenlet megoldását! Azaz: írjuk fel az

$$y'' + \lambda y = 0$$

egyenletet, és az ennek megoldásai szerint fejtsük sorba az előbbi egyenlet jobb oldalát, a gyakorlaton tanultaknak megfelelően!

4. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenleteket, hogy megfelelnek-e Sturm-Liouville-feltételeknek, oldjuk meg a problémákat, és vizsgáljuk meg, hogyan teljesülnek az előző előtti feladatban említett feltételek!

(a) $y'' + 2y' + \lambda y = 0, y(0) + y'(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$

(b) $y'' + 4y' + \lambda y = 0, y(0) + y'(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0$