

# Differenciálegyenletek gyakorlat

2. óra

## 1. ELŐADÁS ANYAGÁNAK ISMÉTLÉSE

(a) Homogén lineáris differenciálegyenletek:

$$y'(x) + g(x)y(x) = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int g}$$

(b) Inhomogén lineáris differenciálegyenletek, állandók variálása,  $C$  helyére  $\tilde{C}(x)$ , ezt visszahelyettesítve

$$\tilde{C} = \int \left( h e^{\int g} \right),$$

és így

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x) \Rightarrow y = \left( C + \int \left( h e^{\int g} \right) \right) e^{-\int g}.$$

(c) Bernoulli-féle differenciálegyenletek

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x)y(x)^n,$$

és innen  $u = y^{1-n}$  helyettesítéssel az

$$\frac{1}{1-n}u' + gu = h$$

inhomogén lineárisra jutunk.

(d) Riccati-féle differenciálegyenletek

$$y'(x) = f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x).$$

Ezt egy  $y_1(x)$  partikuláris megoldás ismeretében,  $u(x) = \frac{1}{y(x)-y_1(x)}$  transzformáció végrehajtásával az

$$u' + (2fy_1 + g)u = -f$$

inhomogén lineárisra jutunk.

## 2. PÉLDAFELADATOK

(a)  $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x^2,$

állandók variálása

(b)  $R$  ohmos ellenállás,  $L$  önindukciójú tekercs sorbakapcsolva egy  $U_0 \cos \omega t$  áramforrást tartalmazó áramkörben. Kirchhoff alapján, tudva, hogy egy tekercsen eső feszültség arányos a rajta átfolyó áram megváltozásával:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U_0 \cos \omega t,$$

és itt állandók variálása helyett a partikuláris megoldást

$$i_0(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

alakban keressük.

(c) Radioaktív bomlás,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

(d) Bernoullira példa:

$$3xy'(x) - 2y(x) = xy(x)^4$$

(e) Riccatira példa:

$$y' + 2y^2 = \frac{1}{\text{id}_{\mathbb{R}}}$$

Ez speciális, itt kicsit egyszerűbb a megoldás, csak  $z = 1/y$ -t kell helyettesíteni, majd ez homogén fokszámú, így itt  $u(x) = z(x)/x$ -et, és szétválasztható lesz, az 'u'-s tag pedig két lineáris nevezőjű tört összegére bontható, innen kész a megoldás.

(f) Riccati partikuláris megoldással:

$$x^2y'(x) + (xy(x) - 2)^2 = 0$$

és

$$y_1(x) = \frac{k}{x},$$

ahol  $y_1$  a partikuláris megoldás,  $k$  valós szám.

Szerintem ennyi kitölti a gyakorlatot, de ha sok, akkor nem baj, ha elmarad belőle valami.