

Differenciál-egyenletek gyakorlat házi feladatok

10. hét

1. Mely α -k esetén elemei az alábbi $x \mapsto f(x)$ függvények E_α -nak?

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \sin(ax)$

(c) $f(x) = e^{4x}$

2. Számoljuk ki az 1a-1c-ben szereplő függvények Laplace-transzformáltját közvetlenül (nem táblázatból kinézve, hanem az integrálást elvégezve)!

3. Mi az alábbi $s \mapsto F(s)$ függvények inverz-Laplace-transzformáltja?

(a) $F(s) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$

(b) $F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 9}$

(c) $F(s) = \frac{s}{2s^2 + 4s + 5/2}$

4. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket a Laplace-transzformáció segítségével!

(a) $y''(x) - y(x) = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 1$

(b) $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 3e^{-2x}, y(0) = 1, y'(0) = 1$

5. Két függvény szorzatának inverz-Laplace-transzformáltját a konvolúció segítségével számíthatjuk ki, azaz (a pongyola jelölést használva):

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = f(x) * g(x), \text{ ahol}$$

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt,$$

amennyiben bizonyos feltételek teljesülnek, például $\exists \alpha$ hogy $f, g \in E_\alpha$. Ezt a tudásunkat felhasználva adjunk meg egy integrál-formulát az

(a) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = f(x), y(0) = 0, y'(0) = 0$

(b) $y''(x) + 3y'(x) - 2y(x) = f(x), y(1) = \sqrt{\pi}, y'(1) = 1/\sqrt{\pi}$

differenciálegyenlet megoldására

6. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert a Laplace-transzformáció segítségével!

$$w'' - y + 2z = 3e^x$$

$$-2w' + 2y' + z = 0$$

$$2w' - 2y + z' + 2z'' = 0$$

$$w(0) = 1, w'(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 2, z'(0) = -2$$