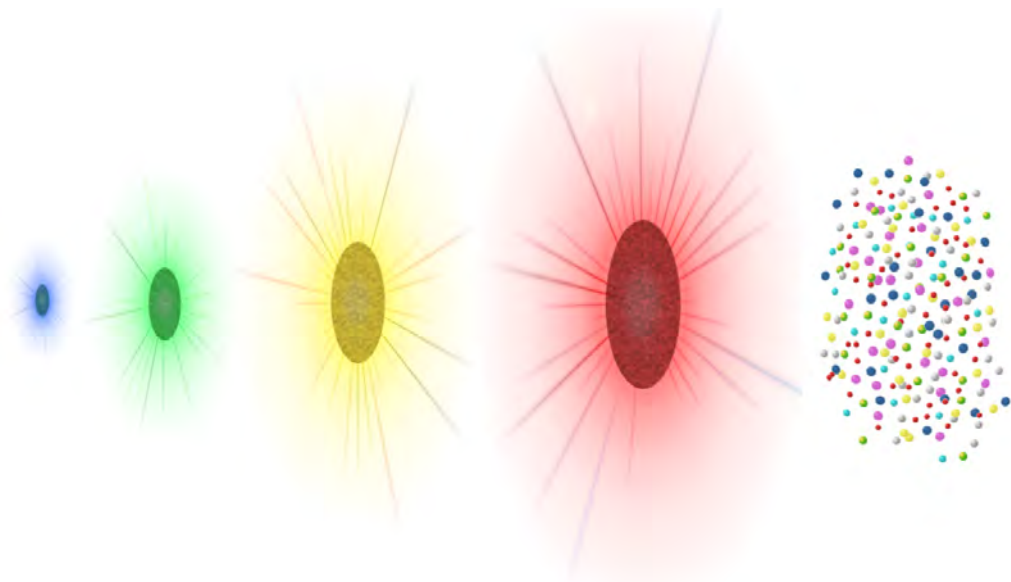


EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

**KVARKANYAG IDŐFEJLŐDÉSÉNEK VIZSGÁLATA
TERMÁLIS FOTONOKKAL**



Szerző:
Májjer Imre
Fizika BSc III. évfolyam

Témavezető:
Csanád Máté
ELTE TTK Atomfizika Tanszék

Kivonat

A Relativisztikus nehézion-ütköztető (RHIC) kísérleteiben tökéletes kvarkfolyadékot állítanak elő extrém rövid időre. Ezen kvarkanyagot hidrodinamikai modellekkel lehet leírni, azonban a relativisztikus hidrodinamika differenciálegyenleteinek csak kevés megoldása ismert, ezek közül is még kevesebb a realisztikus, 1+3 dimenziós megoldás. Az ultrarelativisztikus atommagok ütközése során kialakuló kvarkanyag tágulás és lehűlés után hadronokká alakul. A kifagyási állapot ismert a hadronikus mérésekből, és eme végállapot hidrodinamikai leírásából. A kvarkfolyadék állapotának időfejlődéséről viszont csak a folyamat során állandóan keletkező olyan részecskék hoznak hírt, melyek át tudnak hatolni a kvarkanyagon. Ilyenek például a termális, avagy direkt fotonok, melyek spektrumának mérését 2010-ben a PHENIX kísérlet elvégezte.

Dolgozatomban egy 1+3 dimenziós relativisztikus hidrodinamikai megoldásból kiszámítom a keletkező fotonok spektrumát, és összevetem a mérési adatokkal. Az irodalom átfésülése után úgy látom, hogy ez az első alkalom fotonok esetében, hogy az analitikus számításokat kísérleti eredményekkel hasonlítanak össze. Az összevetésből meghatározom az időfejlődés hosszát, a kezdeti hőmérsékletet és az állapotegyenletet. A kezdeti hőmérséklet eredményeim alapján messze az elméletileg várt kritikus hőmérséklet felett van.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
1.1. Nehézion-fizika	2
1.2. Nehézion-ütközések	2
1.3. Fontosabb eredmények	3
1.4. A fotonspektrum	5
2. Hidrodinamika	6
2.1. Alapegyenletek	6
2.1.1. Nemrelativisztikus eset	6
2.1.2. Relativisztikus eset	7
2.2. Néhány megoldás	8
2.3. A felhasznált megoldás	9
3. Megfigyelhető mennyiségek	11
3.1. A forrásfüggvény	14
3.2. Transzverz impulzus eloszlása	14
3.3. v_2 eloszlása	17
4. Összehasonlítás az adatokkal	18
5. Összefoglalás	21
A. Függelék	23
A.1. $S(x^\mu, \mathbf{p})$ alakja	23
A.2. Gauss-integrálok	24
A.3. C alakja, Bessel-függvények	25
A.4. Gamma-függvény	25
A.5. Az eloszlások paraméterfüggései	26

1. Bevezetés

1.1. Nehézion-fizika

A tudomány jelenlegi állása szerint a minket körülvevő világ elemi részecskékből és azok közötti kölcsönhatásokból épül fel. Ilyen elemi részecskék például a kvarok is, melyeknek egymással szemben mutatott viselkedését az erős kölcsönhatásnak tulajdonítják. Ezt a kvantum-színdinamika (Quantum Chromo Dynamics – QCD) nevezetű modell írja le, mely többek között magyarázza azt is, hogy miért nem figyelhetünk meg egyedi kvarkokat, csak a hadronoknak nevezett több kvarkból álló részecskéket. Ilyen hadron például a proton és a neutron is, melyek az atommagokat építik fel.

A magyarázat arra, hogy miért csak „hadronokba zárva” léteznek a kvarkok, röviden azzal a kifejezéssel foglalható össze, hogy az erős kölcsönhatás bezáró jellegű. Ez annyit jelent, hogy hiába is próbálnánk meg eltávolítani egy hadronban lévő két kvarkot egymástól, az eltávolítás során befektetett energiából újabb kvarkok keletkeznének, és legfeljebb annyi érhető el, hogy egy hadronból kettő lesz. Az irodalomban gyakran ezt kvarkbezárásnak nevezik.

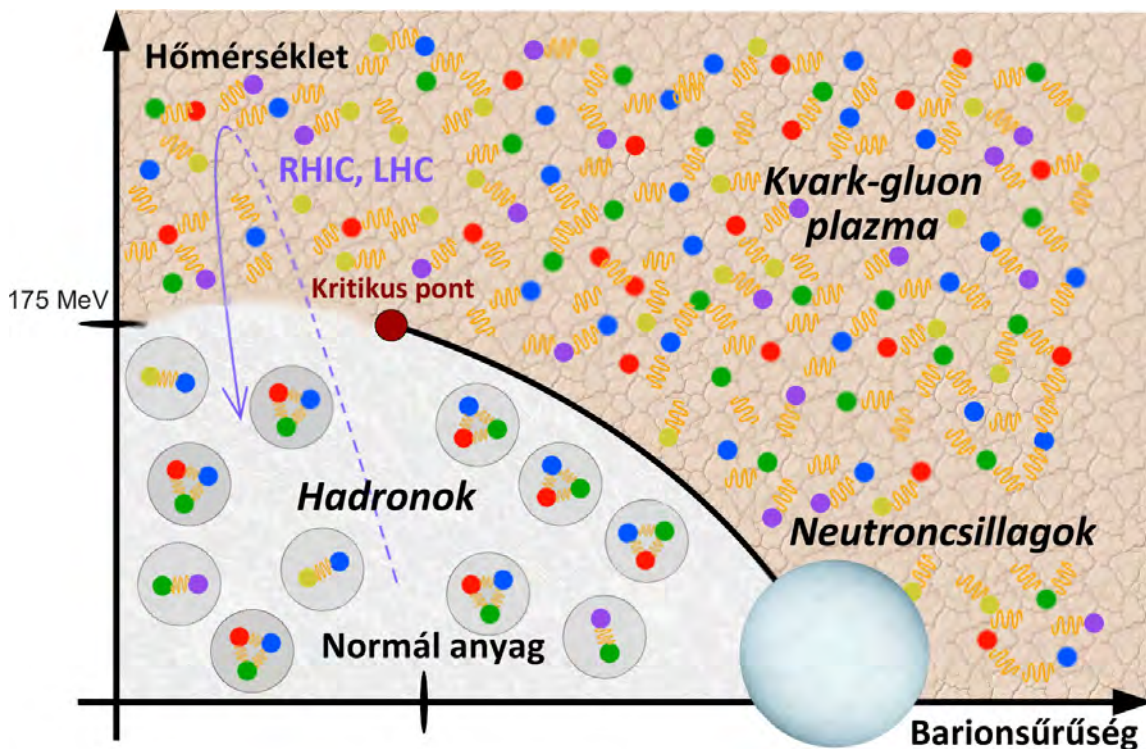
Azonban a QCD azt is megjósolja, hogy extrém nagy hőmérsékleten, akkorán, mely például az Ősrobbanás utáni μs -okban fordult elő, ez a bezártság megszűnik, a kvarkok kiszabadulnak, a hadronok pedig egy egységes kvarkanyagot, vagy más néven kvark-gluon plazmát alkotnak (gluonoknak nevezik az erős kölcsönhatás közvetítő részecskéit). Ezt szemlélteti az 1.1. ábrán található fázisdiagram. Az Egyesült Államokban, Long Islanden található Relativisztikus nehézion-ütköztetőben (Relativistic Heavy Ion Collider – RHIC) [1] hasonló extrém körülményeket hoznak létre nehéz atommagok ütköztetésével.

Ilyenek például a $\text{Cu} + \text{Cu}$ illetve $\text{Au} + \text{Au}$ ütközések, melyben a magok sebessége eléri a fénysebesség 99,995 %-át, az ütközés nukleononkénti tömegközépponti energiája pedig a 200 GeV-ot. Az ütközés középpontjában ez megfelelő feltétel ahhoz, hogy kialakuljon a kvark-gluon plazma. Azonban ez az új közeg nem létezik sokáig (mindössze néhányszor 10^{-23} másodpercig), ugyanis tágulása során hűl, és egy bizonyos hőmérsékleten hadronokká alakul vissza. Ezt nevezik hadronizációnak, illetve kifagyásnak, melyet a dolgozat fedőlapján található illusztráció is szemléltet.

1.2. Nehézion-ütközések

A RHIC-ben tehát nehézionokat, azaz nagy tömegszámú atommagokból álló nyalábokat gyorsítanak fel ultrarelativisztikus sebességekre, majd ütköztetnek egymásnak. A nagy sebességek miatt az atommagokat külső megfigyelőként lapos korongoknak látjuk a Lorentz-kontrakció következtében.

A RHIC-ben két nagy tárológyűrű van, melyek találkozási pontjainál történnek az ütközések. Ezeket a pontokat detektorok ölelik körbe. Az ütközés után keletkezett, detektorba csapódó részecskéket észleljük. Az ütközést csak ezeken a részecskéken keresztül tudjuk megfigyelni, ebből



1. ábra. Fázisdiagram. A QCD által megjósolt fázishatárokat illusztrálja.

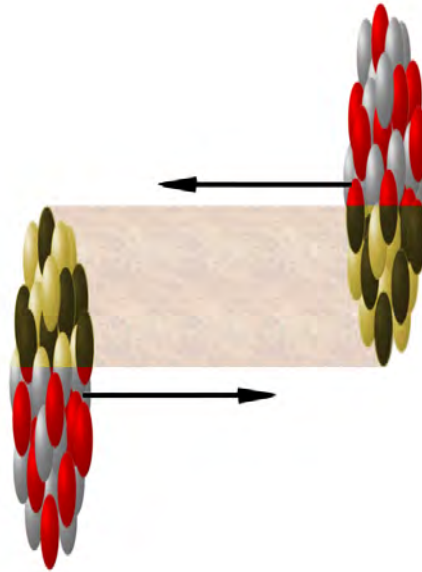
kell visszakövetkeztetni az ott lezajló folyamatokra. Az egyik ilyen összetett detektorrendszer a PHENIX [2], melynek a fotonokra vonatkozó mérési eredményeit a dolgozat további részében felhasználom.

Az ütközés egy fontos paramétere a centralitás, mely nevével összhangban azt írja le, hogy mennyire centrális egy ütközés a többihez képest. Ennek nyomán meg szoktunk különböztetni centralitásosztályokat. Például a 0-30%-os centralitásosztály magába foglalja az ütközési folyamatban lezajló események legcentrálisabb 30%-át. Egy nem centrális eseményt illusztráltam a 2. ábrán.

1.3. Fontosabb eredmények

Újfajta anyag

Részecske ütköztetőben általános jelenség, hogy részecskék ütközésekor az ütközésre merőleges irányban két ellentétes irányú részecskezapor, úgynevezett „jet” érkezik a detektorokba. A RHIC nehézion-ütközései során azonban egy váratlan jelenséget figyeltek meg. Egyrészt a nagyenergiás részecskék száma jóval kevesebb volt, mint előzőleg gondolták, másrészt a hadronokból álló jetek közül az egyik egyáltalán nem, vagy csak kis mértékben volt jelen. Ilyen jelenséget nem tapasztaltak, ha nagyon kis centralitású volt az ütközés, illetve ha az egyik nehéz magokból álló nyalábot deutériumból állóra cserélték. Ez az, ami végső soron a kutatókat egy új közeg létrejöttének felismeréséhez vezette. Deutérium – arany valamint kis centralitású ütközéseknél ilyen



2. ábra. Egy ütközés oldalnézetes illusztrációja: A közel gömb alakú atommagok a Lorentz-kontrakció miatt lapos korongoknak tűnnek. Az egymással ütköző tartományokat más szín jelzi.

közeg alig keletkezik, így nincs sok hatással a jetekre. Amikor pedig létrejön, akkor azt a jetet, mely ebben nagyobb utat tesz meg, jobban le tudja fékezni. További mérések során kiderült, hogy az újfajta közeg legjobban úgy jellemezhető, ha úgy tekintik, hogy a kvarkok kiszabadulnak a hadronokból (megjelennek a kvark szabadsági fokok). A nehézion-ütközésekkor létrejön tehát a kvark-gluon plazma [3, 4, 5, 6].

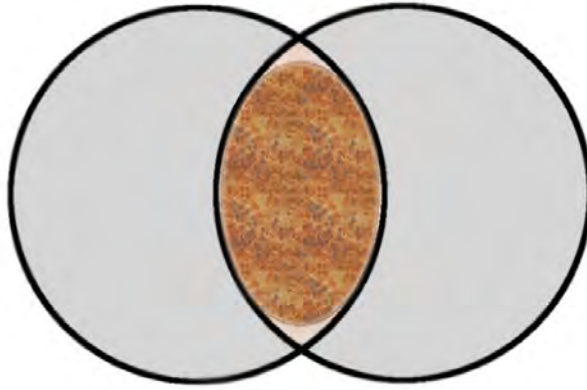
Kollektív viselkedés

Az új anyag ott jön létre, ahol két nehézion összeütközik, így ez a régió más-más centralitásnál másmilyen alakú. Ennek a tartománynak tehát van egy geometriai aszimmetriája (magyarán nem gömb alakú), ahogy ezt a fedőlapi, illetve a 3. ábra is mutatja.

Azt találták, hogy ez a kezdeti geometriai aszimmetria megmutatkozik a kifagyás után kirepülő hadronok impulzuseloszlásában is. Ebből az a következtetés vonható le, hogy az ütközéskor létrejövő kvarkanyag nem olyan, mint egy gáz, hiszen a gáz atomjai csak gyengén hatnak kölcsön egymással, így az impulzuseloszlásnak nem szabadna irányfüggést mutatnia. Ez az anyag sokkal inkább olyan, mint egy folyadék, melyben a részecskék erősen interaktálnak egymással [7].

Tökéletes folyadék

Hamarosan az is kiderült, hogy gyakorlatilag tökéletes folyadékról van szó, azaz majdnem nulla a viszkozitása [8]. Ez azért kissé meglepő, hiszen ezelőtt csak extrém alacsony hőmérsékletű anyagoknál tapasztaltak hasonlót (pl. szuperfolyékony hélium, mely 4 Kelvinnél kisebb hőmérsékletű). De a RHIC ütközéseiben létrejövő kvarkanyag viszkozitása még ezeknél is alacsonyabb.



3. ábra. Egy ütközés szemből nézve. Az ütközési tartomány – ahol a kvarkanyag létrejön – közelíthető egy ellipszoiddal.

1.4. A fotonspektrum

A ma ismert legforróbb anyag tehát tökéletes folyadék, így viselkedésének leírásakor lehet próbálkozni hidrodinamikai modellekkel. A hidrodinamika alapegyenleteit azonban nem könnyű megoldani, nem sok megoldás áll rendelkezésünkre. A következő fejezetben lesz egy rövid hidrodinamikai áttekintő, melyben megemlítek néhány megoldást. Azután kiválasztom a Csörgő, Csernai, Hama és Kodama által 2003-ban publikált megoldást [9]. Ezzel fogom leírni az ütközés-kor keletkező tűzlabda időfejlődését, melyből kiszámolom a kirepülő, direkt fotonok impulzuseloszlását, majd az eredményeket összehasonlítom a kísérleti adatokkal.

A hadronok spektrumát már többen is kiszámolták különböző, nemcsak hidrodinamikai modellekből, és össze is hasonlították a kísérleti eredményekkel. Ez megtörtént a fent említett modellel is [10]. Az ilyen összehasonlításból többek között kihozható a tűzgömb kifagyási hőmérséklete is. Azonban a hadronspektrum csak a kifagyási állapotot tükrözi (hiszen akkor keletkeztek), nem mond semmit a rendszer időfejlődéséről, így például a kezdeti hőmérsékletről sem.

A fotonspektrum azonban más. A jelenlegi modellek azt feltételezik, hogy a közeg létrejötte után minimális idővel bekövetkezik a tűzlabda termalizációja, azaz beáll egy energetikai lokális egyensúly. Csak a termalizáció után lehet statisztikai eszközökkel kezelni az anyagot, ilyenkor beszélhetünk magáról a közeg hőmérsékletéről is. A termalizáció után és a kifagyás előtt állandóan keletkező termikus fotonok (hőmérsékleti sugárzásból eredően) végig át tudnak hatolni a közegen, azaz információt szállítanak a rendszer időfejlődéséről is. A dolgozat fedőlapján található ábra a kifagyásig különböző időpillanatokban ábrázolja a táguló és hűlő tűzlabdát: A hűlés miatt a termikus sugárzás jellemző frekvenciája egyre csökken. Természetesen a színezés a fedőlapon csak illusztráció, a folyamatban keletkező gamma-fotonok energiája a látható tartományba eső energiáknál ($2 - 4$ eV) sok nagyságrenddel nagyobb ($1 - 4$ GeV).

A probléma azonban az, hogy a hadronizáció után is keletkeznek fotonok. Ezek a kifagyáskor létrejövő azon hadronok bomlástermékei, melyek előbb elbomlanak, mielőtt elérik a detektorokat.

Bonyolult elméleti megfontolások és számítások eredményeként 2010-ben sikerült leválasztani a mért fotonspektrumról a direkt fotonok járulékát [11]. Ahogy a név is utal rá, ezek azok a termális fotonok, amelyek közvetlen a forró kvark-gluon plazmából származnak és nem a kifagyott hadronok bomlástermékei. Lehetőség nyílt ezzel arra, hogy a modellek által leírt fotonspektrumot össze lehessen vetni az adatokkal.

Ez a dolgozat fő témája. A Csörgő, Csernai, Hama és Kodama által felállított modelltől [9] kiszámolom a fotonspektrumot. A szabad paraméterek azon részét, melyeket a hadronspektumból már ismerünk, lefixálom (ilyen például a kifagyási sajátidő és hőmérséklet), a többit pedig függvényillesztéssel határozom meg. Az illesztett paraméterek meghatározzák a rendszer időfejlődésének hosszát, kezdeti hőmérsékletét valamint a kvarkanyag állapotegyenletét is.

2. Hidrodinamika

A RHIC gyorsítóiban keletkező új anyag folyadéktulajdonsága miatt a hidrodinamikai leírás igen ígéretesnek bizonyul. Első lépésként lássuk tehát melyek a hidrodinamika alapegyenletei.

2.1. Alapegyenletek

2.1.1. Nemrelativisztikus eset

A folyadékok leírásával foglalkozó hidrodinamika alapegyenletei a fizika általános elveit fogalmazzák meg. Ezek az impulzus- és energiamegmaradás, valamint a leírásban egy olyan folyadékot képzelünk el, melynél a részecskék száma sem változhat. Erre a három mennyiségre vonatkozó kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla(\epsilon\mathbf{v}) = -p\nabla\mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\varrho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \varrho \mathbf{v}(\nabla\mathbf{v}) = -\nabla p, \quad (3)$$

ahol n a részecskeszám-sűrűség, ϵ az energiasűrűség, ϱ a tömegsűrűség ($\varrho = nm_0$, m_0 egy részecske tömege), \mathbf{v} a sebességmező, p pedig a nyomás. Természetesen ezek a mennyiségek általánosan mind a hely és az idő függvényei. Az egyenletek szemléletes jelentései:

- (1) – Egy térfogatelemben lévő részecskék száma csak attól változhat meg, hogy részecskék áramlanak be vagy ki.
- (2) – Egy térfogatelem energiája csak az energia be- illetve kiáramlásától változhat meg, valamint attól, hogy a nyomás munkát végez rajta. (Feltételeztem, hogy nem hat külső erő-sűrűség a rendszerre.)

- (3) – Egy térfogatelem impulzusa csak attól változhat meg, hogy impulzust hordozó részecskék áramlanak be vagy ki, illetve a nyomáskülönbség miatt. Ezt az egyenletet Euler tiszteletére Euler-egyenletnek hívják.

Látható, hogy ez a három egyenlet tényleg a legalapvetőbb fizikai elveket tükrözi.

Az egyenletek megoldásához szükség van a folyadék állapotegyenletére is, hiszen az teremt kapcsolatot az energia, nyomás és sűrűség kifejezések között. A hidrodinamikai alapegyenletek tehát egy nemtriviális parciális differenciálegyenlet-rendszert alkotnak, melyek megoldására nem létezik általános eljárás.

2.1.2. Relativisztikus eset

Mielőtt felírjuk a fenti differenciálegyenletek relativisztikus alakját, tekintsük át a relativitáselméletben használt négyesformalizmust, valamint azokat az összefüggéseket, melyekre szükség lesz a későbbiekben. Az egyenleteket végig olyan mértékegységrendszerben írom, ahol a fénysebesség egységnyi ($c = 1$).

Négyeskoordináta: $x^\mu = (t, \mathbf{x}) = (t, r_x, r_y, r_z)$.

Négyeskoordináta szerinti derivált: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Négyessebesség: $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}) = \gamma(1, v_x, v_y, v_z)$, ahol $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

Négyesimpulzus: $p^\mu = (E, \mathbf{p}) = (E, p_x, p_y, p_z)$.

Sajátidő $\tau = \sqrt{x^\mu x_\mu} = \sqrt{t^2 - x^2} = \sqrt{t^2 - r_x^2 - r_y^2 - r_z^2}$.

Metrikus tenzor: $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

A relativitáselméletre jellemző Minkowski-tér metrikus tenzora, segítségével lehet ott távolságot értelmezni. Gyakorlatban könnyű vele dolgozni, alsó indexes mennyiségeket transzformál felsőbe.

Tömeghég feltétel: $E^2 = m^2 - p^2$.

Rapiditás: $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E+p_z}{E-p_z} \right)$.

Ez a rapiditásdefiníció a kísérleti részecskefizikában használatos, kissé eltér a speciális relativitáselméletben megismerttől, ahol p_z helyett p szerepel.

Az Einstein-konvenciót használva azonos alsó és felső indexes mennyiségek megjelenése esetén arra az indexre automatikus az összegzés.

Következzenek a relativisztikus hidrodinamika alapegyenletei:

$$\partial_\mu(nu^\mu) = 0, \quad (4)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (5)$$

A (4)-es egyenlet a részecskeszámra, az (5)-ös pedig az energiára és impulzusra vonatkozó kontinuitási egyenlet. Az (5)-ös egyenletben szereplő $T^{\mu\nu}$ az úgynevezett energia-impulzus tenzor, melynek alakja a következő:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (6)$$

Természetesen megoldás előtt itt is szükség van egy állapotegyenletre, mely összekapcsolja az egyenletekben szereplő mennyiségeket.

2.2. Néhány megoldás

Milyen az ideális megoldás?

- *Relativisztikus:* Ez nem szorul különösebb magyarázatra, az ütköző magok eleve ultrarelativisztikusak, nagy sebességekkel dolgozunk.
- *1+3 dimenziós:* A keletkező tűzlabda tágulása egyik irányban sem elhanyagolható.
- *Reális geometria:* Azaz nem használ olyan szimmetriákat, melynek nincs különösebb alapja. Hengerszimmetria például csak centrális ütközések esetén lehet reális, mindig jó közelítés azonban az ellipszoidális szimmetria, elég csak a 3. ábrára tekinteni. Az a tartomány, ahol kialakul a kvark-gluon plazma, jól közelíthető egy ellipszoiddal.
- *Gyorsuló:* Ez első ránézésre egy alapvető követelmény, hiszen semmi olyan tényező nincs, amely előírná, hogy a tűzgömb tágulásának egyenletesnek kell lennie. Ám sok megoldás nem teljesíti ezt a kritériumot.
- *Hubble-folyás:* Edwin P. Hubble amerikai csillagász 1929-ben fedezte fel, hogy minél távolabb van egy galaxis, annál nagyobb sebességgel távolodik, méghozzá az összefüggés lineáris ($\mathbf{v} = H\mathbf{x}$). Ilyen sebességmező kiválóan leírja a robbanásból származó részecskék mozgását is, hiszen amelyik részecske távolabbra jutott, az nyilván nagyobb sebessége miatt volt képes erre. Jelen esetben ésszerű feltételezés, hogy ez a Hubble-típusú sebességmező alkalmazható a RHIC-ben keletkezett tűzlabdára is, azzal az eltéréssel, hogy itt nincs meg az Univerzum tágulásánál fellelhető irányfüggetlenség.

Néhány fontosabb megoldás:

Landau-Khalatnyikov megoldás. Landau volt az első, aki felvetette, hogy részecskeütközéseknél lehetne hidrodinamikát használni [12]. Ő volt az, aki megadta a relativisztikus hidrodinamika differenciálegyenleteit, valamint meg is oldotta őket 1+1 dimenziós esetre. A megoldás gyorsuló, érdekessége még, hogy implicit, azaz nincsenek explicit kifejezve a keresendő mennyiségek a hely és idő függvényében, emiatt nehéz vele számolni.

Hwa-Björken megoldás. Hwa [13] és Björken [14] egymástól függetlenül fedezték fel. Egy relativisztikus, 1+1 dimenziós, gyorsulásmentes megoldás. Jelentősége még ma is abban áll, hogy jó alsó becslést ad a kezdeti energiasűrűségekre a mért részecskeszám- és energiasűrűségéből.

Nagy, Csörgő, Csanád megoldása. 1+1 vagy 1+3 dimenziós gömbszimmetrikus, gyorsuló megoldás [15].

Csörgő, Csernai, Hama és Kodama megoldása. Egy nemgyorsuló megoldás, mely az összes többi kritériumot teljesíti [9]. A továbbiakban ezzel fogok számolni (2.3.), így ezt részletesen ismertetem.

Természetesen léteznek egyéb hidrodinamikai és nem hidrodinamikai modellek is. Hidrodinamikaiak közül is ezek analitikusak, de sokan numerikus módszerekkel oldják meg a parciális differenciálegyenlet-rendszereket [16]. Meg kell említeni azt is, hogy szokás úgynevezett parametrizációkat is használni, melyek nem egzakt megoldások, de viszonylag jól le tudják írni a lejátszódó eseményt. A legelterjedtebb ezek közül a Buda-Lund parametrizáció [17].

2.3. A felhasznált megoldás

A megoldást 2003-ban Csörgő és társai találták meg [9]. Állapotegyenletként az ideális gáz állapotegyenleteit használja, melyek a következő alakúak egységnyi Boltzmann-faktorral ($k_b = 1$):

$$p = nT, \quad (7)$$

$$\epsilon = \kappa p = \kappa nT, \quad (8)$$

ahol T a hőmérsékletet, κ pedig az izotermikus kompresszibilitás, melynél azzal a feltételezéssel élek, hogy nem függ a hőmérséklettől.

Csörgő, Csernai, Hama és Kodama megoldása *relativisztikus* és *1+3 dimenziós*. A hármaskordináták (\mathbf{x}) és a sajátidő (τ) függvényében így írható:

$$n(\mathbf{x}, \tau) = n_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^3 \nu(s), \quad (9)$$

$$T(\mathbf{x}, \tau) = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{3/\kappa} \frac{1}{\nu(s)}, \quad (10)$$

$$p(\tau) = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{3(\kappa+1)/\kappa}. \quad (11)$$

A képletekben szereplő kifejezések: $n_0 = n(0, \tau_0)$, $T_0 = T(0, \tau_0)$, $p_0 = n_0 T_0$. Ahol τ_0 egy tetszőleges sajátidő, így megválaszthatom a táguló tűzgömb kifagyási sajátidejének. Ez definíció szerint megegyezik a tűzgömb közepén lévő kifagyási idővel, hiszen ott $\mathbf{x} = 0$.

Az s skálaváltozó egy tetszőleges függvényét jelöli $\nu(s)$. Ez egy kicsit több magyarázatra szorul. A megfigyelhető mennyiségek bizonyos skálatulajdonságokat mutatnak, ami azt jelenti, hogy nem függenek külön-külön a négyeskoordinátáktól, csak azoknak bizonyos kombinációjától. Ez a megoldás *ellipszoidálisan szimmetrikus*, a keresett függvények egy adott sajátidőben állandóak különböző ellipszoidok felszínén. n , T és p explicit nem függenek a helytől és időtől, csak az ellipszoid méretét leíró skálaparamétertől és a sajátidőtől.

$$s = \frac{r_x^2}{X(t)^2} + \frac{r_y^2}{Y(t)^2} + \frac{r_z^2}{Z(t)^2}. \quad (12)$$

Az $X(t)$, $Y(t)$ és $Z(t)$ időfüggő skálaparaméterek értelmezhetőek úgy, mint az $s = 1$ ellipszoid tengelyei.

Azt, hogy ezek az időfüggő paraméterek mégis milyen alakúak, azt abból a kikötésből lehet levezetni, hogy a tűzgömb *Hubble-folyó*. Igaz tehát, hogy egy adott irányban és időpontban a folyadékot alkotó részecske sebességének és távolságának hányadosa konstans. Ez a konstans az adott irányban, adott időpillanatban vett „Hubble-állandó”. Az ellipszoid tengelyeinek irányába kiszámolt „Hubble-állandók” segítségével a sebességmező az alábbi alakú:

$$u^\mu = \gamma(1, v_x, v_y, v_z) = \gamma \left(1, \frac{\dot{X}(t)}{X(t)} r_x, \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} r_y, \frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} r_z \right). \quad (13)$$

Ha ezzel a sebességmezővel leírt megoldást visszaírjuk a hidrodinamika alapegyenleteibe ((4) és (5)), akkor megmutatható, hogy a fent említettek csak akkor érvényesek, ha az ellipszoid tengelyeinek tágulási sebessége konstans, azaz:

$$X(t) = \dot{X}_0 t, \quad (14)$$

$$Y(t) = \dot{Y}_0 t,$$

$$Z(t) = \dot{Z}_0 t.$$

Így a sebességmező a következő egyszerű alakba írható:

$$u^\mu = \left(\gamma, \frac{\gamma}{t} \mathbf{x} \right) = \frac{1}{\tau} (t, \mathbf{x}) = \frac{x^\mu}{\tau}. \quad (15)$$

A sebességmező együttmozgó deriváltjából ($u^\nu \partial_\nu$) kiszámíthatjuk a gyorsulásteret.

$$a^\mu = u^\nu \partial_\nu u^\mu = \frac{x^\nu}{\tau} \partial_\nu \left(\frac{x^\mu}{\tau} \right) = \frac{x^\nu}{\tau} \frac{\tau \partial_\nu x^\mu - x^\mu \partial_\nu \tau}{\tau^2} = \frac{x^\nu}{\tau} \frac{\tau g_\nu^\mu - x^\mu \frac{x_\nu}{\tau}}{\tau^2} = \frac{x^\mu - x^\mu}{\tau^2} = 0. \quad (16)$$

Azaz ez egy *nem gyorsuló* megoldás. Az előző fejezetben mondtuk alapján az ideális az lenne, ha egy gyorsuló megoldás adna határesetben Hubble-folyást, de ilyet relativisztikus esetben még nem sikerült találni.

A megoldásból már csak $\nu(s)$ függvény értelmezése maradt ki. Ez a számsűrűség és a hőmérséklet térbeli eloszlására vonatkozik, hisz argumentumában a skálaváltozó szerepel. Belátható, hogy tetszőleges ilyen függvény kielégíti az alapegyenleteket ((4) és (5)) így egy ésszerű feltételezéssel élünk, miszerint a tűzgömb a közepén a legforróbb és hőmérséklete kifelé exponenciális lecsengést mutat. Ennek megfelelően $\nu(s)$ alakja:

$$\nu(s) = e^{-\frac{b}{2}s}. \quad (17)$$

Értelemszerűen, hogy a feltételezés igaz legyen, b -nek – melyet hőmérséklet gradiensnek is nevezhetünk ($dT/ds = bT$) – egy negatív számnak kell lennie.

Összefoglalva még egyszer, ez a modell: relativisztikus, 1+3 dimenziós, ellipszoidális és végig Hubble-folyó, azaz nem gyorsuló.

3. Megfigyelhető mennyiségek

A részecskegyorsításos, ütköztetős kísérletekben sosem adódik közvetlen lehetőség arra, hogy első kézből lehessen megfigyelni az ütközés helyén lejátszódó eseményeket. Arra „mindössze” a detektorba jutó információk alapján következtethetünk. Az ilyen információkat megfigyelhető mennyiségeknek nevezzük. Egy fontos megfigyelhető mennyiség a detektorba jutó részecskék impulzuseloszlása, melyet a következő módon lehet definiálni:

$$N(\mathbf{p}) = \frac{d^3N}{d^3\mathbf{p}}. \quad (18)$$

Ez elárulja, hogy hány részecske esik egy \mathbf{p} és egy $(\mathbf{p}+d\mathbf{p})$ közötti tartományba. Ezt hívjuk egy részecsketípus impulzuseloszlás-függvényének. Azonban relativisztikus esetben jobb használni egy olyan mennyiséget, mely invariáns a Lorentz-transzformációval szemben. A relativitáselméletben megtanultuk, hogy $d^3\mathbf{p}/E$ invariáns mennyiség, így ennek segítségével definiálható az *invariáns egyrészecske impulzuseloszlás-függvény* is:

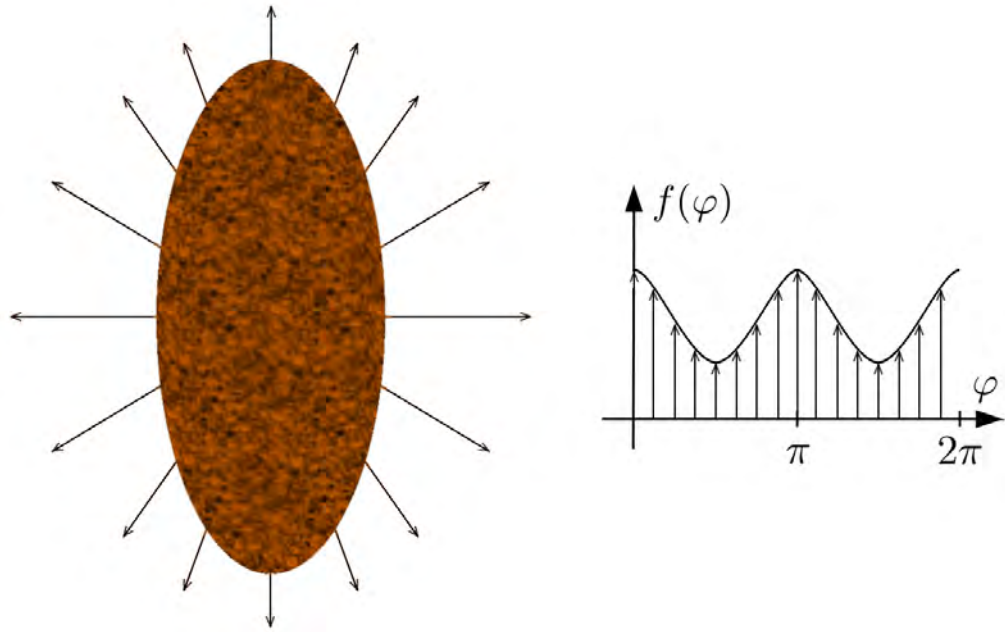
$$N_1(\mathbf{p}) = E \frac{d^3N}{d^3\mathbf{p}}. \quad (19)$$

Ez az egyik legfontosabb mérhető mennyiség a RHIC kísérletek során.

Bevezetve a (p_t, φ, p_z) hengerkoordinátákat, ahol z a longitudinális ütközési irány, az eloszlásfüggvény így írható:

$$N_1(\mathbf{p}) = E \frac{d^3N}{p_t dp_t d\varphi dp_z} = \frac{d^3N}{p_t dp_t d\varphi dy}. \quad (20)$$

Kihasználtuk, hogy $E dy = dp_z$, mely könnyen belátható a rapiditás definíciójából valamint



4. ábra. Bal oldalon látható az ellipszoidként elképzelt tűzlabda. A nagyobb nyíl azt jelenti, hogy abban az irányban több részecske távozik a rendszerből. Ha ezeket a nyilakat szög szerint sorba rendezzük, kiadják a részecskeszám szög szerinti eloszlásának függvényét, azaz $f(\varphi)$ -t

a tömeghég feltételből.

A RHIC – detektorainak elhelyezkedése miatt – csak olyan részecskéket képes észlelni, melyeknek a hosszirányú impulzusa nem túl nagy, azaz rapiditása kicsi. A PHENIX detektorainál ez az érték $|y| < 0,35$. A későbbi számolásoknál azzal a közelítéssel fogok élni, hogy minden ezen irányú tartományba eső részecske $y = 0$ rapiditású, és csak egy két dimenziós eloszlásfüggvényt vizsgálok, ahol a rapiditásbeli eltéréseket nem veszem figyelembe:

$$N_1(p_t, \varphi) = \frac{d^2N}{p_t dp_t d\varphi}. \quad (21)$$

Vessünk egy pillantást a részecskeszám szög szerinti eloszlására, azaz vizsgáljuk $f(\varphi) = dN/d\varphi$ függvényt rögzített rapiditás és transzverz impulzus mellett. Segédletként szemügyre vehetjük a 4. ábrát.

Ha igaz, hogy a kvark-gluon plazma kollektív viselkedést mutat, akkor részecskeszám szög szerinti eloszlásában meg kell mutatkoznia az ellipszoid geometriájának. Erre ad egy példát a 4. ábra, ahol azt feltételezzük, hogy az ellipszoid „csúcsosabb” részénél kevesebb részecske hagyja el azt. Ideális gáznál nincs kölcsönhatás az anyag részecskéi között, így ott $f(\varphi) = \text{konstans}$ lenne a helyzet, azaz iránytól függetlenül ugyanannyi részecske távozna. Készítsük el $f(\varphi)$ függvény Fourier-sorfejtését!

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(v_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\varphi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\varphi) \right). \quad (22)$$

Lévéen $f(\varphi)$ páros függvény, ezért az összes a_n együttható nulla. Ellipszoidális geometriája miatt a függvénynek a $\pi/2$ -es pontokra is párosnak kell lennie, arra viszont minden $\cos(2n+1)$ függvény páratlan, tehát az összes v_{2n+1} együttható is zérus. Így a legelső olyan tag, amely kifejezi a gömbszimmetriától való eltérést, az a v_2 -höz tartozó, v_2 -t ezért *elliptikus folyásnak* hívjuk. A függvényt továbbá úgy normáljuk, hogy a 2π hosszúságú intervallumra való integrálja 1-et adjon, így $v_0 = 1$.

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\varphi) \right). \quad (23)$$

A sorfejtést figyelembe véve az eloszlásfüggvény így írható:

$$N_1(p_t, \varphi) = \frac{dN}{2\pi p_t dp_t} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\varphi) \right) = N_1(p_t) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\varphi) \right). \quad (24)$$

Ezzel bevezettük a transzverz impulzusra vonatkozó egyrészecske eloszlásfüggvényt, $N_1(p_t)$ -t.

Az inverz Fourier-transzformációból megkapható a PHENIX mérések két legfontosabb megfigyelhető mennyisége:

Transzverzális invariáns egyrészecske impulzuseloszlás

$$N_1(p_t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_1(p_t, \varphi) d\varphi. \quad (25)$$

Ez mondja meg, hogy hány részecske található a p_t transzverzális impulzus egy kis környezetében.

Elliptikus folyás

$$v_2(p_t) = \frac{\int_0^{2\pi} N_1(p_t, \varphi) \cos(2\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} N_1(p_t, \varphi) d\varphi}. \quad (26)$$

$N_1(p_t, \varphi)$ szög szerinti Fourier-sorfejtésének második együtthatója. Ha nem is helyettesíti a φ irányú impulzuskomponens megmérését, de elárulja, hogy az eloszlás mennyire tér el a gömbszimmetrikustól. Ez azért lényeges, mert ha a kvarkanyag folyadékokra jellemző kollektív viselkedést mutat, akkor a kezdeti geometriai aszimmetria (mely abból ered, hogy nem centrális az ütközés) megmutatkozik az impulzuseloszlás gömbszimmetrikustól való eltéréseben is (lásd még egyszer a 4. ábrát). Ergo ha ez így van, akkor v_2 nem nulla, melyet a RHIC mérések is bizonyítottak, ezzel megmutatva, hogy a létrejövő anyag tényleg folyadékhoz hasonló [7].

3.1. A forrásfüggvény

Emissziós, vagy más néven forrásfüggvénynek nevezzük azt a függvényt, mely megadja, hogy adott helyen és adott időben (adott négyeskoordinátán) mekkora valószínűséggel keletkezik adott impulzusú részecske. Ha tehát ezt a függvényt kiintegráljuk a teljes térre és a részecskekeletkezés teljes idejére, akkor meg kell kapjuk, hogy mekkora a „részecskesűrűség” egy adott impulzusnál, azaz pont az egyrészecske eloszlásfüggvényhez, $N_1(\mathbf{p})$ -hez jutunk.

$$N_1(\mathbf{p}) = \int S(x^\mu, \mathbf{p}) d^4x. \quad (27)$$

Kérdés tehát, hogy milyen a forrásfüggvény. Az emissziós függvénynek – definíciójából következően – tükröznie kell a rendszerben szereplő részecskék adott hőmérsékletű eloszlását. Mivel a fotonok impulzuseloszlását akarjuk kiszámolni, a fotonok pedig bozon típusú részecskék, ezért a rájuk érvényes Bose-Einstein-eloszlás fogja megadni a forrásfüggvényt.

$$S(x^\mu, \mathbf{p}) d^4x = \frac{dt p_\mu d^3\Sigma^\mu}{e^{p_\mu u^\mu/T} - 1} = \frac{p_\mu u^\mu}{e^{p_\mu u^\mu/T} - 1} d^3x dt, \quad (28)$$

ahol $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, $p_\mu d^3\Sigma^\mu$ pedig egy fluxus jellegű mennyiség, az úgynevezett Cooper-Frye faktor [18]. A folyamatra jellemző hiperfelület vektormértéke $d^3\Sigma^\mu(x)$, melyről felteszem, hogy a négyessebességgel azonos irányú: $d^3\Sigma^\mu(x) = u^\mu d^3x$.

3.2. Transzverz impulzus eloszlása

Ebben a fejezetben $N_1(p_t)$ -t számítom ki. A számolás során különböző elhanyagolásokat használok, melyeknek alapelve, hogy a tűzgömb helyileg lokalizált, így másodrendű közelítésnél mélyebbre nincs szükség, a helykoordinátákban megjelenő harmad- és magasabb rendű tagokat tehát elhanyagolom, mert azok kevés járulékot adnak a forrásfüggvénybe. A számolások részletei a Függelékben találhatóak (A.), így könnyebb átlátni, hogy honnan indultunk, és hogy mi a cél.

A forrásfüggvény még egyszer:

$$S(x^\mu, \mathbf{p}) d^4x = \frac{p_\mu u^\mu}{e^{p_\mu u^\mu/T} - 1} d^3x dt \approx p_\mu u^\mu e^{-\frac{p_\mu u^\mu}{T}} d^3x dt. \quad (29)$$

Itt felhasználtam, hogy $p_\mu u^\mu \gg T$, így az 1-es az exponenciális tag mellett elhanyagolható. Másodrendű közelítést használva az egyes elemek a képletben a következő formát öltik (lásd A.1. függelék):

$$p_\mu u^\mu = E - \frac{p_x}{t} r_x - \frac{p_y}{t} r_y - \frac{p_z}{t} r_z + \frac{E}{2t^2} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2), \quad (30)$$

$$-\frac{p_\mu u^\mu}{T} = C - \frac{(r_x - R_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(r_y - R_y)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(r_z - R_z)^2}{2\sigma_z^2}, \quad (31)$$

ahol

$$R_x = \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{X_0^2}} t \frac{p_x}{E}, \quad \sigma_x^2 = \frac{\kappa T_0 \tau_0^2}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{X_0^2}} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-3/\kappa+2} \frac{1}{E}, \quad (32)$$

$$R_y = \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{Y_0^2}} t \frac{p_y}{E}, \quad \sigma_y^2 = \frac{\kappa T_0 \tau_0^2}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{Y_0^2}} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-3/\kappa+2} \frac{1}{E},$$

$$R_z = \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{Z_0^2}} t \frac{p_z}{E}, \quad \sigma_z^2 = \frac{\kappa T_0 \tau_0^2}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{Z_0^2}} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-3/\kappa+2} \frac{1}{E},$$

$$C = -\frac{1}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{3/\kappa} \left[E - \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{X_0^2}} \frac{p_x^2}{2E} - \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{Y_0^2}} \frac{p_y^2}{2E} - \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{Z_0^2}} \frac{p_z^2}{2E} \right]. \quad (33)$$

A közelítésekkel és az új jelölésekkel a forrásfüggvény a következő alakot ölti:

$$S(x^\mu, \mathbf{p}) = \left[E - \frac{p_x}{t} r_x - \frac{p_y}{t} r_y - \frac{p_z}{t} r_z + \frac{E}{2t^2} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \right] e^{C - \frac{(r_x - R_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(r_y - R_y)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(r_z - R_z)^2}{2\sigma_z^2}}. \quad (34)$$

A Gauss-görbe (és különböző hatványokkal megszorozott változatainak) integrálját felhasználva (lásd A.2. függelék) a teljes térre való integrálást nem bonyolult elvégezni. Az integrál elvégzésével a következőhöz jutunk:

$$\int S(x^\mu, \mathbf{p}) d^3x = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z e^C \left[E - \frac{p_x}{t} R_x - \frac{p_y}{t} R_y - \frac{p_z}{t} R_z + \frac{E}{2t^2} (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \right]. \quad (35)$$

Mostantól használom az $y = 0$, azaz $p_z = 0$ közelítést. A megmaradó két komponens átírható polárkoordinátákra: $p_x = p_t \cos \varphi$, valamint $p_y = p_t \sin \varphi$. Ez azon okból is kényelmes jelölés, mert így a tömeghív feltétel a fotonok nulla tömege miatt leegyszerűsödik:

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} = \sqrt{m^2 + p_t^2} = p_t. \quad (36)$$

A könnyebb áttekinthetőség érdekében használjunk új jelöléseket::

$$\rho_x = \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{X_0^2}}, \quad (37)$$

$$\rho_y = \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{Y_0^2}},$$

$$\rho_z = \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{Z_0^2}}.$$

Ezeket leválasztva a korábban bevezetett mennyiségekről, valamint a fent említetteket alkalmazva:

$$\begin{aligned}
R_x &= \rho_x t \cos \varphi, & \sigma_x^2 &= \rho_x \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-3/\kappa+2} \tau_0^2 \frac{T_0}{p_t}, \\
R_y &= \rho_y t \sin \varphi, & \sigma_y^2 &= \rho_y \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-3/\kappa+2} \tau_0^2 \frac{T_0}{p_t}, \\
R_z &= 0, & \sigma_z^2 &= \rho_z \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-3/\kappa+2} \tau_0^2 \frac{T_0}{p_t},
\end{aligned} \tag{38}$$

$$C = -A \frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{3/\kappa} + B \frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{3/\kappa} \cos(2\varphi), \tag{39}$$

ahol (részletekért az A.3. függelékben)

$$A = 1 - \frac{\rho_x + \rho_y}{4}, \quad B = \frac{\rho_x - \rho_y}{4}. \tag{40}$$

Ezzel a térre kiintegrált, helykoordinátáktól már nem függő $S(t, \mathbf{p}) = \int S(x^\mu, \mathbf{p}) d^3x$ emissziós függvény így írható:

$$\begin{aligned}
S(t, \mathbf{p}) &= (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho_x \rho_y \rho_z} \frac{T_0^{3/2}}{p_t^{1/2}} \tau_0^3 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-\frac{9}{2\kappa}+3} e^{-A \frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{\frac{3}{\kappa}}} \left\{ \frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 + 2}{4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}{2} \frac{T_0}{p_t} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-\frac{3}{\kappa}} + \frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 - 2}{4} \cos(2\varphi) \right\} e^{B \frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{\frac{3}{\kappa}} \cos(2\varphi)}.
\end{aligned} \tag{41}$$

A (25)-ös egyenlet szerint ahhoz, hogy megkapjam $N_1(p_t)$ -t az időintegrálás után szög szerint is integrálni kell az $S(t, \mathbf{p})$ függvényt. Azonban most megcserélem az integrálok sorrendjét, előbb a szög szerintit végzem el (valamint leosztom 2π -vel). Az eredményül kapott függvényt $S(t, p_t)$ -nek hívom.

$$\begin{aligned}
S(t, p_t) &= (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho_x \rho_y \rho_z} \frac{T_0^{3/2}}{p_t^{1/2}} \tau_0^3 \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-\frac{9}{2\kappa}+3} e^{-A \frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{\frac{3}{\kappa}}} \left\{ \left[\frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 + 2}{4} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}{2} \frac{T_0}{p_t} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{-\frac{3}{\kappa}} \right] I_0 \left(B \frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{\frac{3}{\kappa}} \right) + \left[\frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 - 2}{4} \right] I_1 \left(B \frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{\frac{3}{\kappa}} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Itt $I_0(x)$ és $I_1(x)$ a nullad-, illetve elsőrendű elsőfajú módosított Bessel-függvények (lásd az A.3. függelék). Az időintegrállal könnyebb elbánni, ha a Bessel-függvényeket sorfejtett alakjukban írjuk fel.

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n} x^n, \quad (43)$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} x^n. \quad (44)$$

Itt természetesen az együtthatók:

$$a_0 = \left(1, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{64}, 0, \frac{1}{2304}, 0, \dots\right), \quad (45)$$

$$a_1 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{16}, 0, \frac{1}{384}, 0, \frac{1}{18432}, \dots\right). \quad (46)$$

Bevezetek egy új integrálási változót: $\xi = \frac{t}{\tau_0}$, majd a hatványsor beírásával integrálom $S(t, p_t)$ -t egy kezdeti i (intial) értéktől 1-ig (lásd A.4). Azért eddig kell integrálni, mert ez az idő (τ_0) jelenti a kifagyás pillanatát, amikor a kvarkanyag megszűnik, tehát több direkt foton már nem keletkezik. Az eredmény a következő nem csekély méretű függvény:

$$\begin{aligned} N_1(p_t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho_x \rho_y \rho_z} \tau_0^4 T_0 \left(\frac{p_t}{T_0}\right)^{-\frac{4\kappa}{3}+1} \frac{\kappa}{3} \frac{B^n}{A^{n+\frac{4\kappa}{3}-\frac{3}{2}}} \left\{ \left[\frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 + 2}{4} a_{0n} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 - 2}{4} a_{1n} \right] \Gamma\left(n + \frac{4\kappa}{3} - \frac{3}{2}, A \frac{p_t}{T_0} \xi^{\frac{3}{\kappa}}\right) \Big|_1^i + \right. \\ \left. + \left[\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}{2} a_{0n} \right] A \Gamma\left(n + \frac{4\kappa}{3} - \frac{5}{2}, A \frac{p_t}{T_0} \xi^{\frac{3}{\kappa}}\right) \Big|_1^i \right\}. \quad (47) \end{aligned}$$

Egy közelítő formula, csak a nulladrendű ($n = 0$) tagok figyelembevételével:

$$\begin{aligned} N_1(p_t) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho_x \rho_y \rho_z} \tau_0^4 T_0 \left(\frac{p_t}{T_0}\right)^{-\frac{4\kappa}{3}+1} \frac{\kappa}{3} A^{-\frac{4\kappa}{3}+\frac{3}{2}} \left\{ \frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 + 2}{4} \times \right. \\ \left. \times \Gamma\left(\frac{4\kappa}{3} - \frac{3}{2}, A \frac{p_t}{T_0} \xi^{\frac{3}{\kappa}}\right) \Big|_1^i + \left[\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}{2} \right] A \Gamma\left(\frac{4\kappa}{3} - \frac{5}{2}, A \frac{p_t}{T_0} \xi^{\frac{3}{\kappa}}\right) \Big|_1^i \right\}. \quad (48) \end{aligned}$$

3.3. v_2 eloszlása

Következzen a második folyási koefficiens, azaz az elliptikus folyás kiszámítása. Idézzük fel ismét a (26)-os egyenletet:

$$v_2(p_t) = \frac{\int_0^{2\pi} N_1(p) \cos(2\varphi) d\varphi}{\int_0^{2\pi} N_1(p) d\varphi} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_1(p) \cos(2\varphi) d\varphi}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_1(p) d\varphi} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_1(p) \cos(2\varphi) d\varphi}{N_1(p_t)}. \quad (49)$$

Csak a számlálóban szereplő integrál értéke a kérdéses, melynek kiszámításához a korábban ismerttetett eljárást követem, azaz $S(t, \mathbf{p})$ -ből indulok ki, melyen először elvégzem az új $\cos(2\varphi)$ -s szorzást és a szög-, majd csak azután az időintegrálást.

$$v_2(p_t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho_x \rho_y \rho_z} \tau_0^4 T_0 \left(\frac{p_t}{T_0} \right)^{-\frac{4\kappa}{3}+1} \frac{\kappa}{3} \frac{B^n}{A^{n+\frac{4\kappa}{3}-\frac{3}{2}}} \left\{ \left[\frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 + 2}{4} a_{1n} + \frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 - 2}{4} \left(\frac{a_{0n} + a_{2n}}{2} \right) \right] \Gamma \left(n + \frac{4\kappa}{3} - \frac{3}{2}, A \frac{p_t}{T_0} \xi^{\frac{3}{\kappa}} \right) \Big|_1^i + \left[\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}{2} a_{1n} \right] A \Gamma \left(n + \frac{4\kappa}{3} - \frac{5}{2}, A \frac{p_t}{T_0} \xi^{\frac{3}{\kappa}} \right) \Big|_1^i \right\} / N_1(p_t). \quad (50)$$

Jól látható, hogy a számláló majdnem ugyanolyan függvény, mint $N_1(p_t)$, de a $\cos(2\varphi)$ -vel való szorzás a korábbi nulladrendű Bessel-függvények helyett az elsőrendűt, az elsőrendű helyett pedig a $\cos^2(2\varphi) = [1 + \cos(4\varphi)]/2$ trigonometrikus azonosság miatt a nulladendű és másodrendű függvények felének összegét hozza be. A másodrendű Bessel-függvény hatványsorának együtthatói:

$$a_2 = \left(0, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{96}, 0, \frac{1}{3072}, 0, \dots \right). \quad (51)$$

4. Összehasonlítás az adatokkal

A keresett megfigyelhető mennyiségek alakjait megkaptuk Csörgő és társai által felállított modell segítségével. Elérkezett az idő, hogy mindezt összehasonlítsam a PHENIX adataival. Ugyanezzel a megoldással korábban már kiszámolták a hadronikus spektrumot, majd függvényillesztéssel a végállapoti paramétereket is sikerült meghatározni [10]. Ezeket a paramétereket lefixálom, így mindenképpen összhangban leszek a hadronikus megfigyelhető mennyiségekkel.

A modellben kényelmes és szemléletes volt \dot{X} és \dot{Y} jelölés, azonban aki nem ismeri, annak nem sokat mondanak ezek, így bevezetek gyakrabban használt mennyiségeket, az úgynevezett transzverz tágulási sebességet (u_t) és excentricitást (ϵ):

$$\frac{1}{u_t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\dot{X}^2} + \frac{1}{\dot{Y}^2} \right), \quad (52)$$

$$\epsilon = \frac{\dot{X}^2 - \dot{Y}^2}{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}. \quad (53)$$

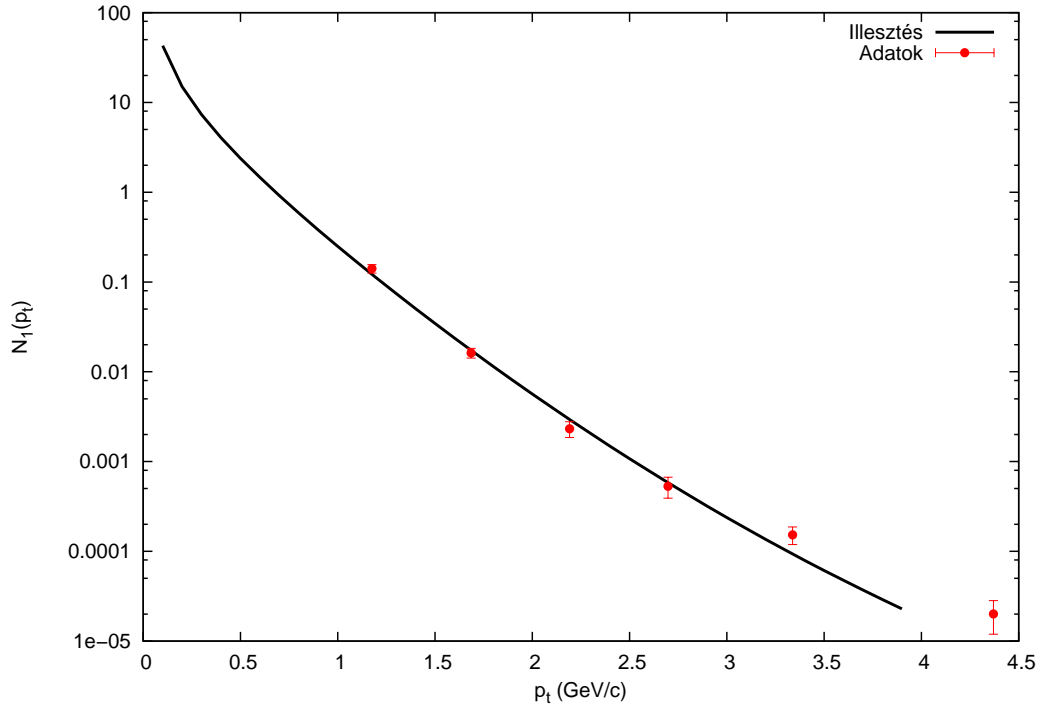
$N_1(p_t)$ alakját C++ nyelven vittem be a számítógépbe ROOT [19] környezetben. Az illesztéshez a Minuit [20] nevezetű programot használtam. Az illesztéskor használtam egy szorzófaktor-ként megjelenő normálási paramétert is. Az eredményeket az 1. táblázatban foglaltam össze. (Az illesztésre jellemző paraméterek pedig a 2. táblázatban találhatóak.)

Paraméter	Jel	Érték	Típus
Kifagyási hőmérséklet	T_0	204 MeV	rögzített
Kifagyási (saját)idő	τ_0	7,7 fm/c	rögzített
Excentricitás	ϵ	0,34	rögzített
Transzverz tágulás	u_t^2/b	-0,34	rögzített
Longitudinális tágulás	Z_0^2/b	-1,6	rögzített
Kompresszibilitás	κ	$7,7 \pm 0,7$	illesztett
Kezdeti idő	t_i	0 – 0.7 fm/c	elfogadhatósági intervallum

1. táblázat. Az eloszlást jellemző szabad paraméterek. Az első öt paramétert rögzítettem a hadronikus spektrum nyomán, a kompresszibilitást illesztettem, a termalizációs időre pedig egy elfogadhatósági intervallumot adtam meg. Megjegyzés: természetesen u_t^2/b és Z_0^2/b a transzverz és longitudinális tágulási sebesség *osztva* a hőmérséklet gradienssel. Azért ezt a jelölést használtam, mert ezek a mennyiségek csak ilyen kombinációban fordulnak elő.

Illesztési adatpontok száma		5
Illesztett paraméterek száma		2
Szabadsági fokok	NDF	$5 - 2 = 3$
Khi-négyzet	χ^2	7,0
Az illesztés konfidenciaszintje		7,2%

2. táblázat. Az illesztést jellemző egyéb paraméterek. Az illesztett paraméterek száma 2, ugyanis amint már említettem, kompresszibilitáson kívül még volt egy normalizációs faktor is. Különösebb fizikai jelentése nincsen, így azért nem szerepel az előző táblázatban.



5. ábra. A foton spektrum (y tengely logaritmikus skálázással)

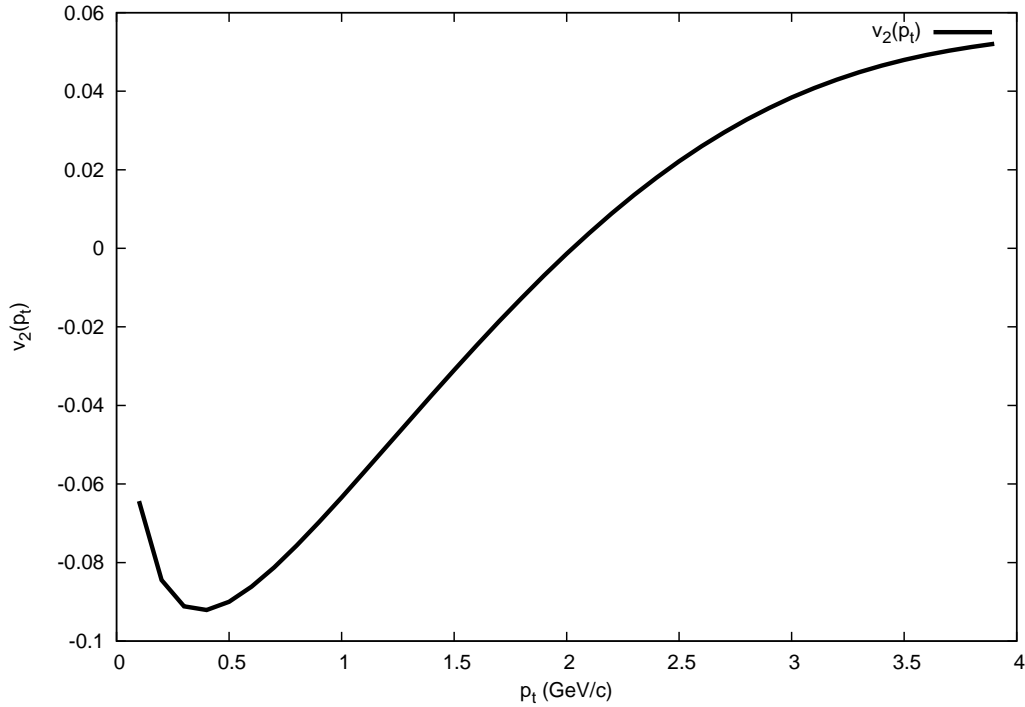
A kompresszibilitás értéke $\kappa = 7,7$ -nek adódott. Relativisztikus gáz esetén $\kappa = 3$, tehát egyrészt ebből is látható, hogy nem egy gázzal állunk szemben, másrészt ez az érték összhangban van a QCD-ből számolt elméleti értékkel [21].

A kezdeti termalizációs időre nem annyira érzékeny az eloszlás, mivel a kezdeti szakaszban alig van foton termelődés. Ez jól látható az A.5 függelék 7. ábráján is. Emiatt arra sajnos nem sikerült konkrét értelemben illeszteni, azonban $0,7$ fm/c értékig az illesztés konfidenciaszintje 5% fölött van, így ezt az időértéket tekintem egy felső határnak. Az 5. és 6. ábrákon ábrázoltam ezekkel a paraméterekkel kiszámolt $N_1(p_t)$ és $v_2(p_t)$ függvényeket. Az elliptikus folyásról egyelőre nem állnak rendelkezésre mérési adatok, így azt nincs mivel összehasonlítani. Meglepő eredmény azonban, hogy kis transzverz impulzusokra v_2 negatív, azaz olyan esetekre nem a 4. ábrán látható függvény írja le a szög szerinti eloszlást, hanem egy $\pi/2$ -vel eltolt, azaz fordítva hullámzó változata.

Az A.5. függelékben található még néhány ábra, melyek az eloszlások kompresszibilitás és termalizációs időfüggését ábrázolják.

A kezdeti hőmérsékletet visszaszámolhatjuk a (10)-es képlet alapján κ és t_i felhasználásával. A termalizációs időre csak egy felső korlátunk van, ezért a hőmérsékletre is csak egy alsó határt tudunk szabni. A tűzgömb közepén ($\mathbf{x} = 0, s = 0$) kialakult legkisebb hőmérséklet a (10)-es képlet szerint ($t_i = 0,7$ fm/c értékkel számolva):

$$T(0, t_i) = T_0 \left(\frac{\tau_0}{t_i} \right)^{3/\kappa} \approx 0,519 \text{ GeV}. \quad (54)$$



6. ábra. Elliptikus folyás

A kompresszibilitás hibájából származó bizonytalanság:

$$\delta T(0, t_i) = \left| \frac{\partial T(0, t_i)}{\partial \kappa} \right| \delta \kappa = T_0 \frac{3}{\kappa} \left(\frac{\tau_0}{t_i} \right)^{3/\kappa-1} \delta \kappa \approx 0,012 \text{ GeV}. \quad (55)$$

Ez a hiba nagyságrendekkel kisebb, mint ami a termalizációs idő hibájából származna, így lényegtelen az alsó határ szempontjából. Gyakorlatilag azt mondhatjuk, hogy $T = 520$ GeV-ban sikerült találni egy alsó korlátot a középpont kezdeti hőmérsékletének. Ez összhangban van más hidrodinamikai modellekkel, melyek a kezdeti hőmérsékletet 300 – 600 MeV-ra becsülik [22].

5. Összefoglalás

A dolgozat egy új és napjainkban nagyon aktív kutatási területbe, a nehézion-fizikába nyújtott betekintést. A nehézion-ütköztetésekkel keletkező kvarkanyagról kiderült, hogy tökéletes folyadék, így leírásának egyik lehetséges megközelítése a hidrodinamika. Idén elérhetővé váltak a direkt fotonok transzverz impulzuseloszlásának adatai, ezzel lehetőség nyílt a hidrodinamikai leírás újabb próbájára. Ez volt az első alkalom, hogy a foton spektrumra analitikus modellszámításokkal sikerült függvényt illeszteni, még hozzá kiváló eredményekkel. A foton spektrum azonban ennél jóval többet nyújtott. A fotonok a – kvark-gluon plazma alkotta – tűzgömbön annak időfejlődése során végig áthatolnak, míg a korábbi hadronikus spektrum csak a végállapotról adott információt. Az időfejlődés kulcsfontosságú, mert ebből tudtam meghatározni az állapotegyenlet

kérdéses paraméterét, a kompresszibilitást (κ) és megbecsülni a rendszer időfejlődésének hosszát (t_i , a termalizáció ideje volt csak kérdéses, mivel a kifagyási sajátidő a hadronikus spektrumból már ismert volt). Ebből a két paraméterből pedig sikerült a középpont kezdeti hőmérsékletére egy alsó korlátot találni ($T(0, t_i)$). Az eredmények egybevágtak korábbi modellek, becslések eredményeivel is, tovább erősítve a kvarkanyagról alkotott fizikai képünket.

A kvark-gluon plazma nemcsak a nehézion-fizikusok szempontjából egy érdekes kutatási terület, hanem vizsgálatával betekintést nyerhetünk Univerzumunk korai szakaszaiba is, amikor a feltételezések szerint még csak ilyen anyag alkotta a világunkat. Eme dolgozat is mutatja, hogy a kérdéskör még korántsem egy lezárt terület, számtalan ismeretlen áll még előttünk, melyek megválaszolására sok munkát kell még fordítani.

A. Függelék

A.1. $S(x^\mu, \mathbf{p})$ alakja

Nézzük meg kicsit részletesebben hogy jönnek ki a (30)-as és (31)-es egyenletek, melyekből végül felírható a (34)-es forrásfüggvény. A relativitáselméletben megismert négyesimpulzus és négyessebesség alakja, ahol felhasználjuk a (14)-es egyenleteket is:

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$$

$$u^\mu = \gamma(1, v_x, v_y, v_z) = \gamma \left(1, r_x \frac{\dot{X}}{X}, r_y \frac{\dot{Y}}{Y}, r_z \frac{\dot{Z}}{Z} \right) = \gamma \left(1, \frac{r_x}{t}, \frac{r_y}{t}, \frac{r_z}{t} \right)$$

A γ faktor másodrendű sorfejtése a következő:

$$\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2} = 1 + \frac{r_x^2}{2t^2} + \frac{r_y^2}{2t^2} + \frac{r_z^2}{2t^2}$$

$$p_\mu u^\mu = \left(1 + \frac{r_x^2}{2t^2} + \frac{r_y^2}{2t^2} + \frac{r_z^2}{2t^2} \right) \left(E - \frac{p_x r_x}{t} - \frac{p_y r_y}{t} - \frac{p_z r_z}{t} \right)$$

A zárójel felbontásával, és csak a legfeljebb helyben másodrendű tagok megtartásával lehet eljutni a (30)-as egyenlethez.

Végezzük el a következő sorfejtést és közelítéseket:

$$\tau^{3/\kappa} = (t^2 - r^2)^{3/2\kappa} \approx \left(1 - \frac{3}{2\kappa} \frac{r^2}{t^2} \right) t^{3/\kappa} = \left(1 - \frac{3}{2\kappa t^2} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \right) t^{3/\kappa}$$

$$e^{-\frac{b}{2}s} \approx 1 - \frac{b}{2}s = 1 - \frac{b}{2} \left(\frac{r_x^2}{X^2} + \frac{r_y^2}{Y^2} + \frac{r_z^2}{Z^2} \right) = 1 - \frac{1}{2t^2} \left(\frac{b}{\dot{X}_0^2} r_x^2 + \frac{b}{\dot{Y}_0^2} r_y^2 + \frac{b}{\dot{Z}_0^2} r_z^2 \right)$$

$$e^{-\frac{b}{2}s} \tau^{3/\kappa} = \left[1 - \frac{1}{2t^2} \left(\frac{b}{\dot{X}_0^2} r_x^2 + \frac{b}{\dot{Y}_0^2} r_y^2 + \frac{b}{\dot{Z}_0^2} r_z^2 \right) \right] \left(1 - \frac{3}{2\kappa t^2} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \right) t^{3/\kappa} \approx$$

$$\approx \left[1 - \frac{1}{2t^2} \left(\frac{b}{\dot{X}_0^2} r_x^2 + \frac{b}{\dot{Y}_0^2} r_y^2 + \frac{b}{\dot{Z}_0^2} r_z^2 \right) - \frac{3}{2\kappa t^2} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \right] t^{3/\kappa} =$$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{2t^2} \left[\left(-\frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{X}_0^2} \right) r_x^2 + \left(-\frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{Y}_0^2} \right) r_y^2 + \left(-\frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{Z}_0^2} \right) r_z^2 \right] \right\} t^{3/\kappa}$$

A már kiszámolt (30)-as és (10)-es egyenleteket osztva egymással, valamint felhasználva a fenti sorfejtéseket, közelítéseket, megkapjuk a (31)-es egyenletet:

$$\begin{aligned}
\frac{p_\mu u^\mu}{T} &= \frac{1}{T_0} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{3/\kappa} e^{-\frac{b}{2}s} \left(E - \frac{p_x}{t} r_x - \frac{p_y}{t} r_y - \frac{p_z}{t} r_z + \frac{E}{2t^2} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \right) = \\
&= \frac{1}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{3/\kappa} \left\{ 1 + \frac{1}{2t^2} \left[\left(-\frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{X}_0^2} \right) r_x^2 + \left(-\frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{Y}_0^2} \right) r_y^2 + \left(-\frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{Z}_0^2} \right) r_z^2 \right] \right\} \times \\
&\quad \times \left(E - \frac{p_x}{t} r_x - \frac{p_y}{t} r_y - \frac{p_z}{t} r_z + \frac{E}{2t^2} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) \right) \approx \\
&= \frac{1}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0} \right)^{3/\kappa} \left\{ E + \frac{E}{2t^2} \left[\left(1 - \frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{X}_0^2} \right) r_x^2 + \left(1 - \frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{Y}_0^2} \right) r_y^2 + \left(1 - \frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{Z}_0^2} \right) r_z^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. - \frac{p_x}{t} r_x - \frac{p_y}{t} r_y - \frac{p_z}{t} r_z \right\}
\end{aligned}$$

Az egyenlet a tér három koordinátájában ugyanolyan alakú, ezért a következőkben a teljes négyzetté alakítást csak az r_x koordinátán nézzük meg.

$$\begin{aligned}
\frac{E}{2t^2} \left(1 - \frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{X}_0^2} \right) r_x^2 - \frac{p_x}{t} r_x &= \frac{E}{2t^2} \left(1 - \frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{X}_0^2} \right) \left(r_x^2 - 2t \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{\dot{X}_0^2}} \frac{p_x}{E} r_x \right) = \\
&= \frac{E}{2t^2} \left(1 - \frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{X}_0^2} \right) \left[\left(r_x^2 - \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{\dot{X}_0^2}} \frac{p_x}{E} t \right)^2 - \frac{\kappa^2 t^2}{\left(\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{\dot{X}_0^2} \right)^2} \frac{p_x^2}{E^2} \right] = \\
&\quad \frac{E}{2t^2} \left(1 - \frac{3}{\kappa} - \frac{b}{\dot{X}_0^2} \right) \left(r_x^2 - \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{\dot{X}_0^2}} \frac{p_x}{E} t \right)^2 - \frac{\kappa}{\kappa - 3 - \kappa \frac{b}{\dot{X}_0^2}} \frac{p_x^2}{2E}
\end{aligned}$$

Ebből jól látszik, hogyha (32) és (33) jelöléseket használjuk, akkor megkapjuk a (31)-es kifejezést.

A.2. Gauss-integrálok

A (34)-es forrásfüggvényben a tér szerint Gauss-görbék jelentek meg. Az integrálok egy részét táblázatból ismerjük, de kapásból nem mindet. Azonban koordinátatranszformáció segítségével megkaphatóak az itt szükséges integrálok is:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Ekkor a görbe eltolásakor sem változik semmi.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (y+x_0) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \sigma\sqrt{2\pi}x_0$$

Itt végrehajtottunk egy $y = x - x_0$ koordinátatranszformációt, így visszavezettük az integrált az előzőre, illetve kihasználtuk, hogy az első tag integrálja nulla, hiszen egy páros és páratlan függvény szorzata alkotja.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (y+x_0)^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y^2 + 2yx_0 + x_0^2) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \sigma^3\sqrt{2\pi} + \sigma\sqrt{2\pi}x_0^2 = \sigma\sqrt{2\pi}(\sigma^2 + x_0^2)$$

Az eljárás ugyanaz volt, mint az előzőnél, illetve kihasználjuk azt, hogy az első tag integrálja ismert.

A.3. C alakja, Bessel-függvények

A (37)-es jelöléssel, polár impulzuskordinátákkal, $y = 0$ közelítéssel, valamint kihasználva azt, hogy $E = p_t$ a C érték az alábbi alakba írható:

$$C = -\frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{\frac{3}{\kappa}} \left[1 - \rho_x \frac{p_x^2}{2p_t^2} - \rho_y \frac{p_y^2}{2p_t^2}\right] = -\frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{\frac{3}{\kappa}} \left[1 - \frac{\rho_x}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\rho_y}{2} \sin^2 \varphi\right] =$$

$$= -\frac{p_t}{T_0} \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{\frac{3}{\kappa}} \left[1 - \frac{\rho_x}{4} - \frac{\rho_y}{4} - \frac{\rho_x}{4} \cos(2\varphi) + \frac{\rho_y}{4} \cos(2\varphi)\right]$$

Használva a (40)-es (A és B) jelöléseket, C tényleg a (39)-es alakba írható. Ez az alak azért kényelmes, mert így az $S(t, \mathbf{p})$ (41)-es függvény szög szerinti integrálja módosított, elsőfajú Bessel-függvényekre fog vezetni, ugyanis:

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2n\varphi) \exp(x \cos(2\varphi)) d\varphi$$

Ebből következik a (42)-es $S(t, p_t)$ függvény alakja.

A.4. Gamma-függvény

Miután beírjuk a Bessel-függvények sorfejtett alakjait, és a változó transzformációt is elvégeztük, az időintegrálnál az alábbi alakú tagok jelennek meg:

$$\left(\frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 + 2}{4} a_{0n} + \frac{(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - 1)^2 - 2}{4} a_{1n} \right) \int_i^1 \xi^{\frac{6n-9}{2\kappa}+3} \exp\left(-A \frac{p_t}{T_0} \xi^{\frac{3}{\kappa}}\right) d\xi$$

$$\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}{2} \frac{T_0}{p_t} a_{0n} \int_i^1 \xi^{\frac{6n-15}{2\kappa}+3} \exp\left(-A \frac{p_t}{T_0} \xi^{\frac{3}{\kappa}}\right) d\xi$$

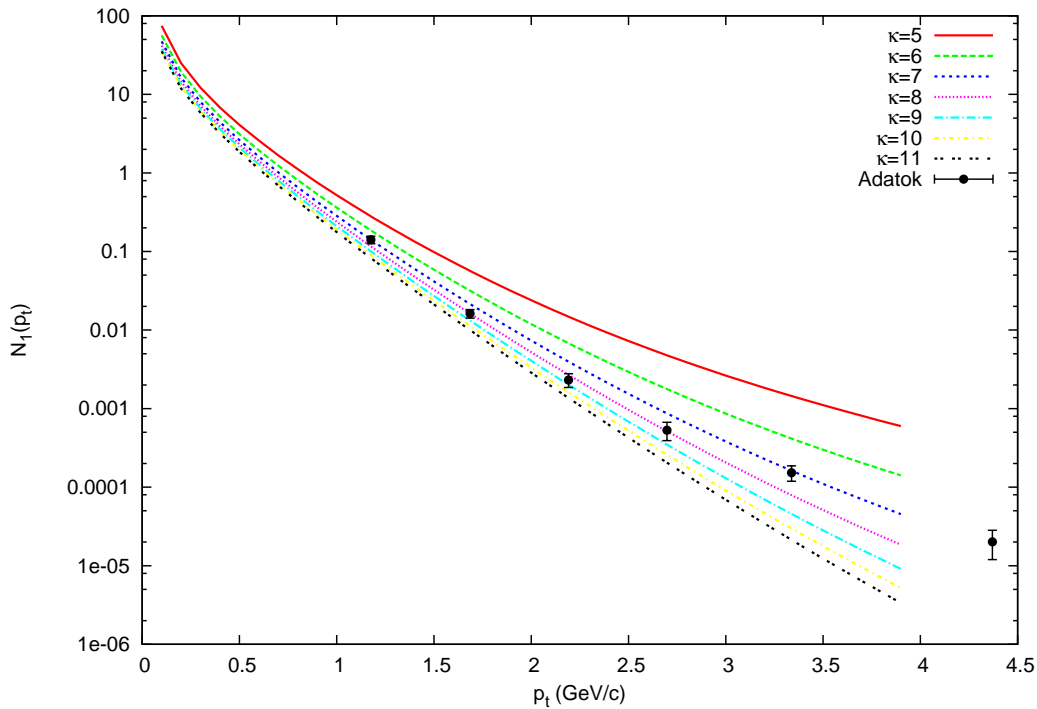
Látható, hogy mindkét integrálnak azonos az alakja, méghozzá olyan, melynek primitív függvényét táblázatból ki lehet nézni:

$$\int \xi^a e^{b\xi^c} d\xi = -\frac{1}{c} (-b)^{-\frac{a+1}{c}} \Gamma\left(\frac{a+1}{c}, -b\xi^c\right)$$

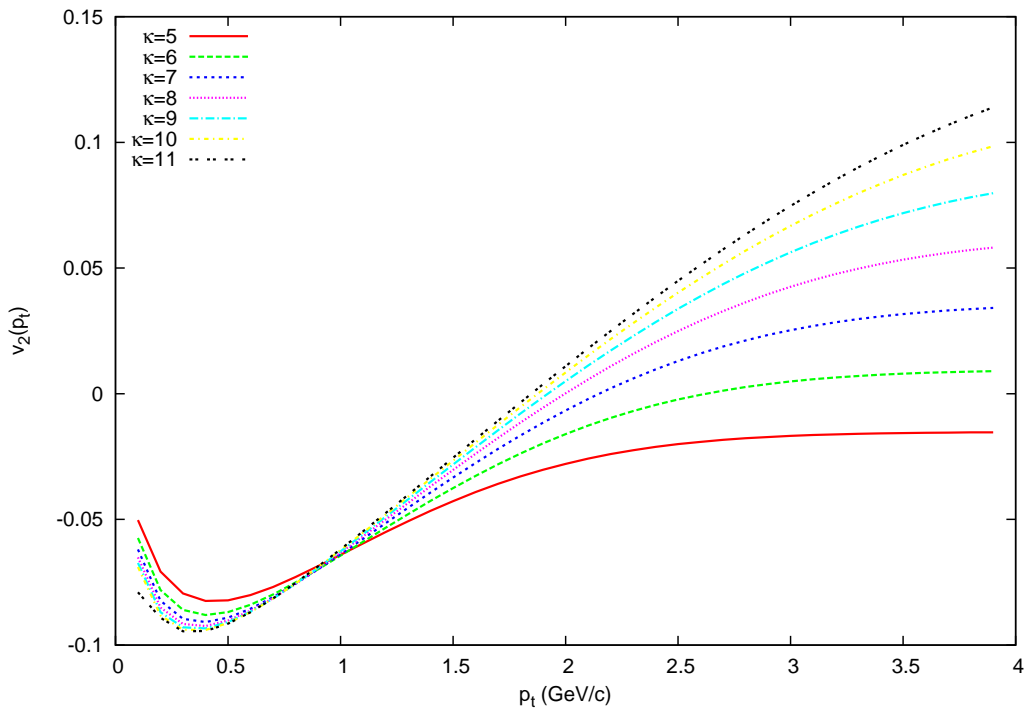
A megfelelő a , b és c értékekkel, és egy kis átrendezéssel eljuthatunk a (47)-es egyenlethez.

A.5. Az eloszlások paraméterfüggései

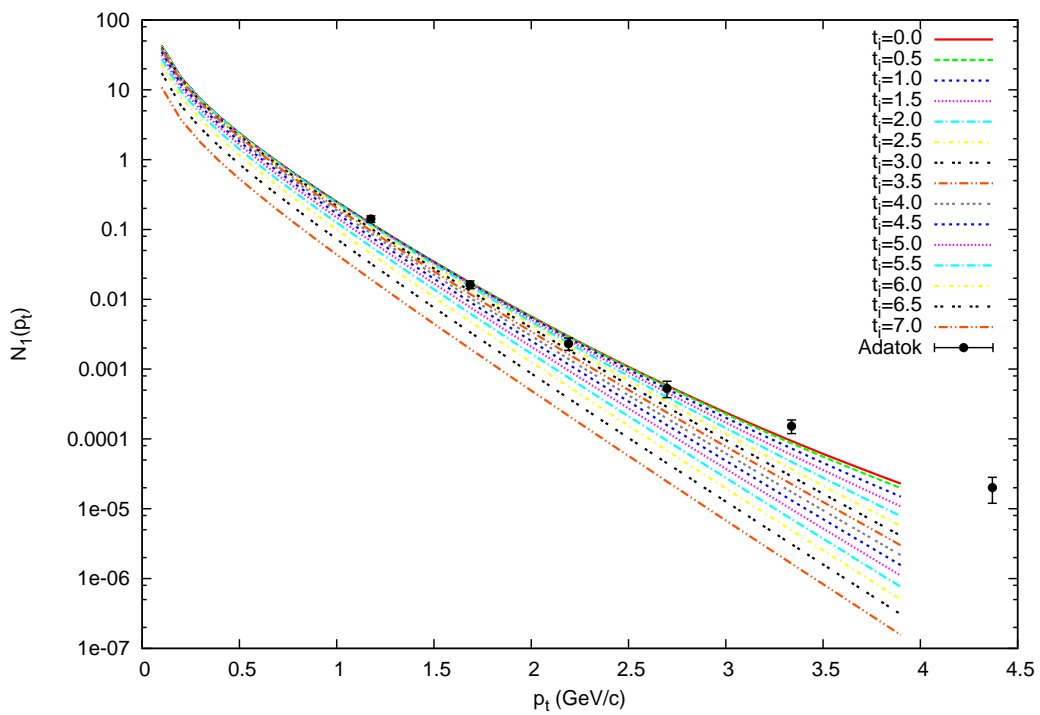
A következő grafikonokon $N_1(p_t)$ és $v_2(p_t)$ eloszlásokat láthatjuk különféle paramétereknél. Jól látható, hogy az időfejlődés eleje alig számít, ezért volt nehéz t_i paramétert illeszteni. Ez arra vezethető vissza, hogy a gamma függvények nulla körül alig változnak.



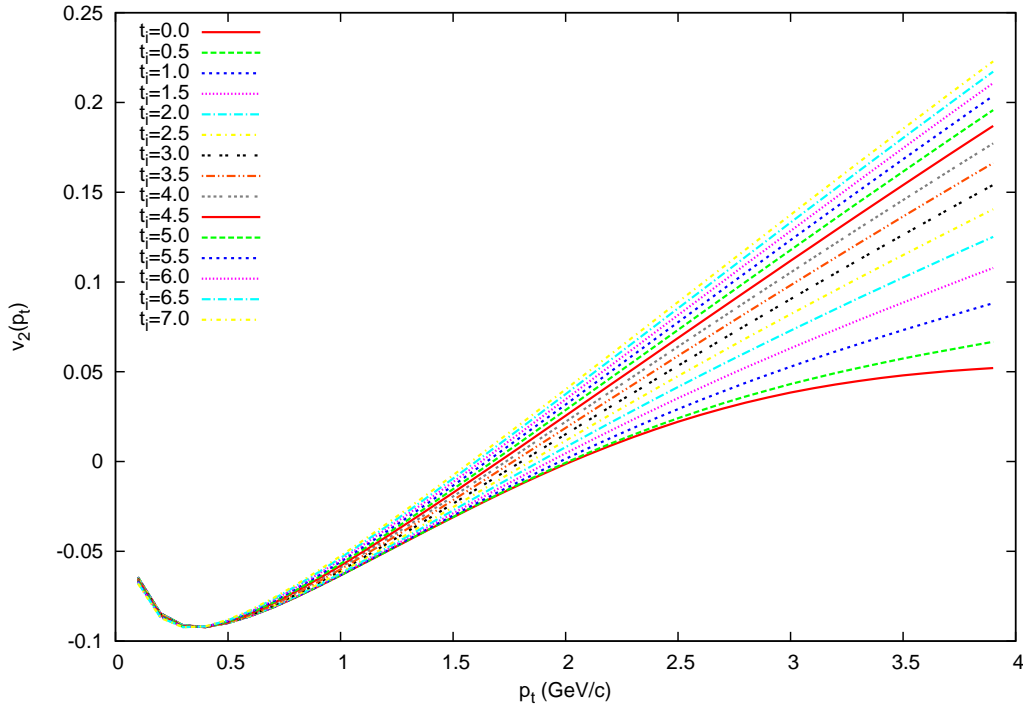
7. ábra. $N_1(p_t)$ képe eltérő kompresszibilitásoknál



8. ábra. $v_2(p_t)$ képe eltérő kompresszibilitásoknál



9. ábra. $N_1(p_t)$ képe eltérő termalizációs időknél



10. ábra. $v_2(p_t)$ képe eltérő termalizációs időknél

Hivatkozások

- [1] Relativistic Heavy Ion Collider. Rhic.
- [2] PHENIX Collaboration. PHENIX \equiv Pioneering High Energy Nuclear Interaction eXperiment. Full details are available from <http://www.phenix.bnl.gov/>, 2004.
- [3] K. Adcox et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration. *Nucl. Phys.*, A757:184–283, 2005.
- [4] I. Arsene et al. Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment. *Nucl.Phys.*, A757:1–27, 2005.
- [5] B. B. Back et al. The phobos perspective on discoveries at rhic. *Nucl. Phys.*, A757:28–101, 2005.
- [6] John Adams et al. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The star collaboration’s critical assessment of the evidence from rhic collisions. *Nucl. Phys.*, A757:102–183, 2005.
- [7] S. S. Adler et al. Elliptic flow of identified hadrons in au + au collisions at $s(nn)^{1/2} = 200$ -gev. *Phys. Rev. Lett.*, 91:182301, 2003.

- [8] A. Adare et al. Energy loss and flow of heavy quarks in au + au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ -gev. *Phys. Rev. Lett.*, 98:172301, 2007.
- [9] T. Csörgő, L. P. Csernai, Y. Hama, and T. Kodama. Simple solutions of relativistic hydrodynamics for systems with ellipsoidal symmetry. *Heavy Ion Phys.*, A21:73–84, 2004.
- [10] Máté Csanád and Márton Vargyas. Observables from a solution of 1+3 dimensional relativistic hydrodynamics. *Eur. Phys. J.*, A44:473–478, 2010.
- [11] A. Adare et al. Enhanced production of direct photons in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV and implications for the initial temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 104:132301, 2010.
- [12] L. D. Landau. On the multiparticle production in high-energy collisions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz.*, 17:51–64, 1953.
- [13] Rudolph C. Hwa. Statistical description of hadron constituents as a basis for the fluid model of high-energy collisions. *Phys. Rev.*, D10:2260, 1974.
- [14] J. D. Bjorken. Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region. *Phys. Rev.*, D27:140–151, 1983.
- [15] T. Csorgo, M.I. Nagy, and M. Csanad. New exact solutions of relativistic hydrodynamics. *J.Phys.G*, G35:104128, 2008.
- [16] I.P. Lokhtin, L.V. Malinina, S.V. Petrushanko, A.M. Snigirev, I. Arsene, et al. Heavy ion event generator HYDJET++ (HYDroynamics plus JETs). *Comput.Phys.Commun.*, 180:779–799, 2009.
- [17] M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad, and A. Ster. Indication of quark deconfinement and evidence for a hubble flow in 130-gev and 200-gev au + au collisions. *J. Phys.*, G30:S1079–S1082, 2004.
- [18] Fred Cooper and Graham Frye. Comment on the single particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production. *Phys. Rev.*, D10:186, 1974.
- [19] R. Brun and F. Rademakers. ROOT: An object oriented data analysis framework. *Nucl.Instrum.Meth.*, A389:81–86, 1997.
- [20] F. James and M. Roos. Minuit: A system for function minimization and analysis of the parameter errors and correlations. *Comput. Phys. Commun.*, 10:343–367, 1975.
- [21] Szabolcs Borsányi et al. The QCD equation of state with dynamical quarks. *JHEP*, 11:077, 2010.
- [22] Roy A. Lacey and Arkadij Taranenko. What do elliptic flow measurements tell us about the matter created in the little bang at RHIC? *PoS*, CFRNC2006:021, 2006.