

Relativisztikus hidrodinamika LHC ütközésekben

szerző: Lökös Sándor
konzulens: Csanád Máté

2011. november 7.

1. Bevezetés

A relativisztikus hidrodinamika eredményeinek legfőbb alkalmazási területei (és egyben ösztönzői is) a nehézion-fizikai kutatások. Ezen kutatási eredmények az Univerzum korai szakaszának leírásában, az erre vonatkozó elméletekben, mint például a kvantum-színdinamikában és az általa jósolt fázisátmenetek vizsgálatában játszanak szerepet.

Jelenlegi tudásunk szerint az Univerzum kb. 13,7 milliárd éve létezik. Azt, hogy milyen folyamatok játszódtak le közvetlenül az Ősrobbanás után, csak találgatni lehet. Elméleteink jelenlegi korlátja nagyjából az Ősrobbanás utáni első mikroszekundumnál van. A korábbi időszakról nem sikerült egységes képet alkotni eddig. A kvarkok bezáródása (az ún. hadrongenezis) is az Ősrobbanás utáni, körülbelül első mikroszekundumra tehető. Ezután az anyag hadrongáz formájában létezett. Azóta az Univerzum kitágult, mely jelentős lehűléssel járt. Az akkori állapotokat rekonstruálni tudjuk, kísérletileg a háttérsugárzás megfigyelésével, a most látható anyag tulajdonságaiból, nehézion ütközésekből.

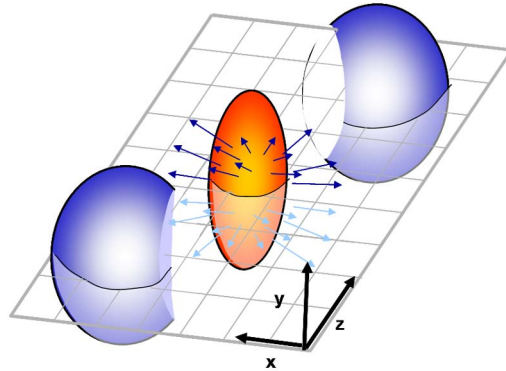
A hűlés következtében a kvarkok bezáródtak duplettekbe és triplettekbe, nukleonokba. Az ily módon bebörtönözött kvarkok már nem figyelhetőek meg szabadon, csak ezen kötött állapotokban. Azonban elegendően nagy hőmérsékleten és nyomáson, amilyen a Világegyetem korai szakaszában volt, elérhető, hogy a kvarkok kiszabaduljanak hadron börtönükből és a köztük lévő kölcsönhatást (erős kölcsönhatás) közvetítő részecskékkel, a gluonokkal együtt létrehozzák a kvark-gluon plazmát, az anyagnak egy új állapotát.

Ez egy olyan nem rég felfedezett állapota az anyagnak, mely extrém rövid ideig létezik nehézion ütközések nyomán, szinte rögtön kihűl és megtörténik a hadronizáció, azaz a kvarkok ismét részecskékké állnak össze. Ez a folyadéként viselkedő anyag rendkívül forró, nagyon sűrű, a viszkozitása rendkívül alacsony. E folyamatból (hadronizáció útján) keletkezett részecskéket tudjuk különböző speciális detektorokkal detektálni és ezekből vissza tudunk következtetni az anyagra, amiből keletkeztek. A kvark-gluon plazmát sokáig ritka gázként képzeltek el, melynek részei nem, vagy alig hatnak kölcsön egymással. Meglepetés felfedezés volt, amikor a RHIC-ben megfigyelték a folyadékszerű viselkedést. Erről majd a 2. részben ejtek szót.

Az elméleti leírásra ezért a relativisztikus hidrodinamika eszközei alkalmas választásnak tűntek. Látni fogjuk, hogy néhány speciális feltétel mellett a hidrodinamikai modellek nagyon jól működnek, helyes jóslatokat adnak. Ennek demonstrálására bemutatok néhány régebbi és néhány újabb eredményt, mint például az első ilyen jellegű megoldást, melyet Landau és Khalatnikov állított fel, de egy nemrelativisztikus megoldásról is ejtek szót.

Az általam részletesebben vizsgált megoldás tartalmaz néhány speciális feltételezést melyek a nehézion ütközésekre való alkalmazást tartják szem előtt. Ilyen az ellipszoidális szimmetria feltételezése (1.ábra). Azt, hogy ezt hogyan kell figyelembe venni az elméletben, a részletes számítás során tárgyalom. Ez egy természetesen adódó feltétel, hisz az ütközésekben a viszonylag nagy magok centrális ütközésének nagyon kicsi a valószínűsége.

Ezen megoldásból már korábban kiszámított megfigyelhető mennyiségeket



1. ábra. Az ellipszoidális szimmetria szemléletes ábrája. Az atommagok azon részeit, melyek nem vettek részt a kölcsönhatásban, szintén detektálni lehet. Az ezeket alkotó részecskéket *spektátoroknak* (spectators) hívjuk, míg az ellipszoidot alkotó részecskéket *participánsnak* (participants)

illesztem majd az LHC ALICE detektorából származó adatokra.

Szintén a későbbiekben látjuk azt is, hogy a hadronizációra egy pillanatszerű kifagyási modellt használunk a vizsgált esetben. A pontosabb részletekre szintén a részletes számolásnál térek ki.

2. A RHIC felfedezései

A Relativisztikus Nehézion Ütköztetőnek (RHIC) több nevezetes felfedezése is volt a kvark-gluon plazma kutatása során. Ezen felfedezések eme kutatási terület mérföldköveinek tekinthetők, ezért jelen dolgozatban ezek említése elkerülhetetlen.

Az első mérföldkő az ún. *jet quenching* jelenségének megfigyelése volt [1], [2]. Ez azt jelenti, hogy nehézion ütközések (pl. Au+Au) során nagyenergiás részecske-nyalábok (*jetek*) nyelődtek el, vagy vesztették el energiájukat egy új közegben, melynek az ütközés során kellett létrejönnie. Ennek eredményeként a várt nagy impulzussal rendelkező részecskék által alkotott jet-párok közül csak az egyiket észlelték. Bevezették az ún. nukleáris modifikációs faktort, mely azt mérte, hogy Au+Au ütközéséből keletkező részecskék száma, hogy aránylik a proton-proton ütközésekből keletkező részecskék arányával. Ezt még lenormálták a bináris ütközések várható számával. Amikor ezt a faktort megmérték kiderült, hogy a nagyimpulzusú részecskékre a várt 1 helyett 0,2 és 0,4 közötti érték adódik Au+Au ütközések esetén, míg proton-proton ütközések esetén a várt 1 körüli értéket veszi fel. Nehézion ütközésekben hiányzott a nagy impulzusú részecskék 60-80%-a.

Ennek magyarázatára több feltételezés is született. Az egyik ilyen az Au atommagok szerkezetmódosulása volt. Mások véleménye az volt, hogy az eredmé-

nyek az anyag egy új állapotára engednek következtetni. Eme új állapotban a kvarkok és a gluonok egy erősen kölcsönható plazmát hoznak létre, melyben az erős kölcsönhatásban résztvevő részecskék elnyelődhetnek (mint pl. a π^0 -ok).

Ellenpróbaként elvégeztek olyan ütközéseket [3], melyekben egy deuteron és egy Au atommagot ütköztettek. Ha valóban az atommagok szerkezete módosult volna, akkor a jelenségnek meg kellett volna ismétlődnie ebben az esetben is. A jelenség azonban nem ismétlődött meg. Az anyagnak egy valóban új formáját találták meg, melyet az ezt követő mérések is alátámasztottak.

További megfigyelések skálaviselkedést mutattak (azaz, bizonyos mérhető mennyiségek nem egyesével függnek a paraméterektől, hanem azok egy bizonyos kombinációjától). Továbbá felmerült a kérdés, hogy milyen az anyag impulzuseloszlásának szögfüggése. Ezt jól jellemzi a szögfüggést leíró függvény Fourier-transzformáltjának második komponense, amit elliptikus folyásnak hívnak és általában v_2 -vel jelölik. Ha ez a mennyiség nem nulla, akkor az impulzuseloszlás anizotróp.

Az új anyag elméleti leírására a legsikeresebbnek a hidrodinamikai modellek bizonyultak. Ezen modellek megtudták magyarázni az ún. skálaviselkedést. A folyadékkép sikeresen megjósolta az elliptikus folyást ($v_2 \neq 0$, nem úgy, mint ahogy korábban gondolták a gázszerű kvark-gluon plazma képben) [4, 5].

Felmerült az a kérdés, hogy mennyire tökéletes ez a folyadék. A mérési eredmények azt mutatták [6], hogy a kvark-gluon plazma egy rendkívül kis viszkozitású, szinte tökéletes folyadék. (A tökéletes folyadéknak elhanyagólhatóan kicsi a viszkozitása és a hővezetése.) Viszkozitásának értéke az elméleti minimumhoz közel van: $\eta/s \approx (1,1 - 1,5) \cdot \hbar/4\pi$, ahol $\hbar/4\pi$ a feltételezett elméleti minimum.

A foton spektrumból sikerült azt is megállapítani, hogy az elméleti számításoknak megfelelően magas kezdeti hőmérséklettel rendelkezik ez az anyag [7], hozzávetőleg 300-600 MeV. A rács-QCD számítások szerint 170 MeV az az energia, mely felett megjelenhetnek a kvark szabadsági fokok. Ez is megerősíti azt, hogy az új anyagot valóban kvarkok alkotják.

3. Hidrodinamikai áttekintés

Ezen részben bemutatom a hidrodinamika alapegyenleteinek levezetését, végig a szemléletességet tartva szem előtt. A levezetések nem részletesek, csupán jelezni kívánják a lépéseket és a mögöttük rejlő fizikai megfontolásokat.

3.1. A klasszikus hidrodinamika

A klasszikus hidrodinamika három alapegyenlete a tömegmegmaradást kifejező kontinuitási egyenlet, a mozgásegyenlet, azaz az Euler-egyenlet és az energiamegmaradást biztosító egyenlet. (Végig feltételezzük, hogy a folyadék belsejében vagyunk. Ez fontos kikötés, mivel így semmilyen határreteggel kapcsolatos probléma nem merül fel.)

3.1.1. A kontinuitási-egyenlet

A kontinuitási egyenlet levezetéséhez egyszerűen fel kell írni a folyadék egy tömegelemének (infinitesimalisan kicsi, de elegendően sok részecskét tartalmazó dV térfogat) felületére, az azon időegység alatt keresztül áramló folyadékmennyiséget ($d\mathbf{f}$ a felület normálisa a térfogattól kifelé mutat):

$$\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f}. \quad (1)$$

Ezt úgy is felírhatjuk, hogy a dV térfogatban csökken a folyadékmennyiség:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV. \quad (2)$$

Természetesen ezt a két mennyiséget egyenlővé tehetjük. Így kapjuk (Gauss – Ostrogradskij-tétellel átalakítva a felületi integrált térfogattá) a következőt:

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (3)$$

Mivel ez tetszőleges térfogatelemre igaz kell, hogy legyen, ezért

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

Ez a kontinuitási egyenlet. A kontinuitási egyenletekhez mindig tartozik egy megmaradó mennyiség (Noether-töltés), jelen esetben a tömeg, de a ρ jelölhetne más megmaradó mennyiséget is. Ezek általában sűrűség, számsűrűség, entrópia-sűrűség és hasonló jellegű mennyiségek.

3.1.2. Euler-egyenlet

A tömegelem mozgásegyenletét is könnyen megkaphatjuk, ha felírjuk rá a Newton-törvényt. A folyadék belsejéből kiválasztott tömegelemre ható összes erő a szomszédos tömegelemből származik, vagyis:

$$-\oint p d\mathbf{f} = -\int \operatorname{grad} p dV, \quad (5)$$

azaz egységnyi térfogatra $\operatorname{grad} p$ erő hat. Ebből következik, hogy az egységnyi térfogat mozgásegyenlete:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p. \quad (6)$$

Itt a $d\mathbf{v}/dt$ nem a folyadék sebessége a vizsgált tér egy rögzített pontjában, hanem a vele együtt mozgó rendszerben van értelmezve (Lagrange-koordinátázás). Ha az ún. laborrendszerbeli leírást szeretnénk megkapni (Euler-koordinátázás), akkor figyelembe kell venni a tér változását is. Ezt tesszük meg a konvektív

taggal. (Térelméletileg ez annyit jelent, hogy áttérünk a Lagrange-koordinátákról az Euler-koordinátákra. Függelék.) Vagyis figyelembe vesszük a részecske sebesség-változását az adott pontban és a megváltozáshoz szükséges idő alatt megtett út két végpontja közötti sebességkülönbséget:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v} = d\mathbf{v} \quad (7)$$

ha dt -vel leosztunk kapjuk a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \quad (8)$$

kifejezésből, behelyettesítve (5) egyenletbe,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}p \quad (9)$$

ún. *Euler-egyenletet*, melyet először *L.Euler* állított fel 1755-ben.

Ugyanerre az eredményre jutottunk volna térelméleti megfontolásokkal is. Ha feltesszük, hogy a Lagrange-sűrűségfüggvény a következő alakú:

$$\Lambda = \rho_0 \left(\frac{v^2}{2} - \epsilon \right), \quad (10)$$

akkor behelyettesítve az Euler-Lagrange-egyenletbe kapjuk az Euler-egyenlet Lagrange-koordinátás alakját, mely a következő képpen néz ki:

$$\rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r_b} p J J_{ba}^{-1}, \quad (11)$$

ahol J a \mathbf{J} Jacobi mátrix determinánsa, J_{ba}^{-1} az elmozdulástér gradiensének inverzéből származik.

Ha figyelembe vesszük, hogy a fenti eredményt is Lagrange-koordinátákban kaptuk, ráismerünk az Euler-egyenletre, hisz Euler-koordinátákban a Jacobi-determináns kifejezései egyet adnak, míg a derivált a (8)-as egyenlet szerint íródik.

3.2. Energiamegmaradás

Ha feltesszük, hogy a folyadékban nincs belső súrlódás és hőcsere, valamint lokális termodinamikai egyensúly áll fent (kis folyadékelem állapotváltozása egyensúlyi állapotokon keresztül történik), akkor az entrópia konstansnak tekinthető egy pályavonal mentén. Ezt fejezzük ki a $ds/dt = 0$ összefüggéssel, ahol a derivált az elmozdulástér egy pontjában van értelmezve. Ennek következményeképpen áll fenn, hogy

$$d\epsilon = Tds - p \left(d\frac{1}{\rho} \right) = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (12)$$

Mely egyenletből

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\epsilon) = -\frac{p}{\rho}\nabla\mathbf{v}. \quad (13)$$

3.3. Állapotegyenlet

Ha csak a felírt egyenleteink lennének, akkor kevesebb egyenletünk lenne mint ahány ismeretlenünk. Ezért meg kell teremteni a kapcsolatot az ϵ és a p között. Ezt tesszük meg az állapotegyenletekkel, melyek alakja a következő:

$$p = nT, \quad \epsilon = \kappa(T)p \quad (14)$$

ahol a κ , az anyag kompresszió-modulusa, legáltalánosabb esetben $\kappa(T, p)$ is lehet. Ebből látszik, hogy a $\kappa = \epsilon/p$. κ .

Tudjuk, hogy az anyagban a zavar hullámként terjed

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (15)$$

sebességgel. Innen látható, hogy az általánosan $1/\kappa(T, p)$ nem más mint a közegbeli hangsebesség.

Bizonyos megoldásokban ez valóban függ a hőmérséklettől. Ezek a lökeshullám modellek. Mi nem ilyet vizsgálunk (κ nem ugrik), κ végig állandó marad.

3.4. A relativisztikus hidrodinamika

A relativisztikus hidrodinamika egyenleteinek származtatása már nem végezhető el olyan szemléletesen mint a klasszikus esetben. A kontinuitási egyenlet sem a tömegmegmaradást, hanem részecskeszám megmaradást jelenti.

$$\partial_\mu(nu^\mu) = 0, \quad (16)$$

ahol u^μ a négyes-sebesség, n pedig a részecskeszám-sűrűség. Ha komponensenként kiírjuk, megkapjuk a klasszikus kontinuitási egyenletet. Ekkor az n részecskeszám-sűrűséget a ρ sűrűségre kell cserélni.

Az energiamegmaradást és az Euler-egyenletet az energia-impulzus tenzor (EIT) divergenciájának eltűnése adja.

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (17)$$

Itt $T^{\mu\nu}$ alakja

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (18)$$

(Persze az EIT alakját szintén térelméleti megfontolásokkal ki lehet számolni.)

Elvégezve a deriválást megkapjuk a relativisztikus Euler-egyenletet és az energiamegmaradás törvényét:

$$(\epsilon + p)u^\nu \partial_\nu u^\mu = (g^{\mu\rho} - u^\mu u^\rho) \partial_\rho p \quad (19)$$

$$(\epsilon + p)\partial_\nu u^\nu + u^\nu \partial_\nu \epsilon = 0, \quad (20)$$

ahol $\epsilon + p = w$, azaz a szabad entalpiával.

4. Néhány megoldás rövid bemutatása

Ez a rész szükségképpen leíró jellegű, történeti, mellőz minden hosszabb levezetést. A megoldásokat csak röviden összefoglalva mutatja be.

4.1. Landau – Khalatnikov (LK)-megoldás

Landau [8], sok más zseniális ötlete mellett, elsőként javasolta a folyadékmodell alkalmazását a relativisztikus ütközések leírására, mint például a légkörben lezajló proton-proton ütközések. Ő vezette le a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit és talált is azokra egy megoldást 1+1 dimenziós esetre, mely azonban implicit, így nehéz vele számolni. Mivel ez a megoldás csak longitudinális irányban értelmezett nem számolhatók belőle az általunk illeszteni kívánt mennyiségek.

Landauék a már említett

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (21)$$

összefüggést, bizonyos termodinamikai feltévésekkel ($d\epsilon = Tds, w = Ts$) áttranszformáltak a

$$u_k \frac{\partial(Tu_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad (22)$$

kifejezésbe. Mivel ebben az esetben csak x_1 és x_4 (azaz t és z) koordináták játszanak szerepet, ezért az következő adódik:

$$\frac{\partial(Tu_1)}{\partial x_4} + \frac{\partial Tu_4}{\partial x_1} = 0. \quad (23)$$

Vezessük be a relativisztikus hidrodinamika egydimenziós mozgásának potenciáljaként a ϕ függvényt:

$$Tu_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad Tu_4 = \frac{\partial \phi}{\partial x_4} \quad (24)$$

ahol ϕ kielégíti

$$d\phi = Tu_4 dx_4 + Tu_1 dx_1 \quad (25)$$

relációt.

Ha bevezetjük t -t x_4 helyett, $u_0 = 1/\sqrt{1-v^2}$ -et az u_4 helyett és az x -et az x_1 helyett, akkor a

$$d\phi = -Tu_0 dt + Tu_1 dx. \quad (26)$$

kifejezést kapjuk:

Definiáljuk a sebsséget a u_0 és u_1

$$u_1 = \sinh \alpha, \quad u_0 = \cosh \alpha \quad (27)$$

választással. Elvégezve egy Legendre-transzformációt T -ben, α -ban, a következő potenciál adódik:

$$d\chi = d(\phi + Tu_0t - Tu_1x). \quad (28)$$

Átalakítások után Landau és Khalatnikov erre a potenciálra a következő egyenletet írták fel:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + (c_0^2 - 1) \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad (29)$$

ahol $y = \ln T$. Ezzel a hidrodinamikai probléma egy matematikai problémává vált. További egyszerűsítés a $3p = \epsilon$ és $c_0^2 = 1/3$ kikötés:

$$3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0. \quad (30)$$

Új változókat bevezetve és elvégezve rengeteg átalakítást kaptak Landauék α -ra és y -ra (N.B. $y = \ln T - \ln T_0$) megoldást, mely, bevezetve

$$\ln \frac{t+x}{\Delta} = \tau, \quad \ln \frac{t-x}{\Delta} = \eta \quad (31)$$

kifejezéseket (ahol Δ a Lorentz-kontrakciót szenvedett magok vastagsága) és figyelembe véve, hogy $\epsilon \approx T^4$:

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp \left[-\frac{4}{3} (\eta + \tau - \sqrt{\eta\tau}) \right] \quad (32)$$

és az α rapiditás értéke pedig

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{t+x}{t-x} = \frac{\tau}{\eta}. \quad (33)$$

4.2. Hwa – Bjørken (HB)-megoldás

Történetileg Hwa [9] volt aki ezt a megoldást megtalálta. Sajnos ez csak 1+1 dimenziós és gyorsulásmentes, de explicit, mely könnyíti az alkalmazást a Landau-félével szemben.

Hwa definiált egy $f(k)$ impulzuseloszlás függvényt, mely azt mondja meg, hogy a megfigyelhető piont alkotó részecskék milyen valószínűséggel találhatók k_μ impulzussal még a kifagyás előtt egy adott helyen. A jelenséget $b = 0$ impakt paraméterrel írta le tömegközépponti rendszerben. Azt feltételezte, hogy az ütközés középpontjánál a legnagyobb a részecskék kezdősebessége és kifelé egyre csökken. Így a kifelé száguldó részecskéket szeletekre osztotta. Ezen szeletekben

való átlagos helyzetet x_μ -vel jelölte, definiálta az $F(x, k)$ számsűrűség függvényt azon részecskékre, melyek ezzel az x_μ -vel jellemezhető szeletben k és $k + dk$ között találhatóak.

Az volt a feltevés, hogy létezik ilyen $F(x, k)$ függvény és ez megteremti a kapcsolatot a folyadék makroszkópikus tulajdonságai x_μ -ben és a részecskék mikroszkópikus tulajdonságai k_μ -ben között. Definiálta a fluxust:

$$S_\mu = \int k_\mu F(x, k) \frac{d^3k}{k_0} \quad (34)$$

és EIT-t

$$T_{\mu\nu}(x) = \int k_\mu k_\nu F(x, k) \frac{d^3k}{k_0}. \quad (35)$$

Amíg a részecskék száma megmarad, addig az EIT-nak is meg kell "maradnia", vagyis kapunk egy kontinuitási egyenletet:

$$\partial_\mu S^\mu = 0 \quad (36)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (37)$$

Ez a modell megad egy összefüggést a részecskeszám rapiditáseloszlásra a sebesség függvényében:

$$\frac{dN}{dy} = \left[\gamma \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_t \right]^{-1}, \quad (38)$$

ahol $\gamma = \sqrt{1 - v^2}$. Lehet, hogy a tömegelem útja a Minkowski tér-időben nem egyenes. Definiáljuk ($x^\mu = (t, z)$ a cella közepét adja) :

$$v = \frac{dz}{dt}, \quad u = \frac{z}{t}. \quad (39)$$

Az $u=v$ egyenlőség nem feltétlenül kell, hogy igaz legyen, de ebben az esetben az. Így adta meg Hwa a sebesség mezőt.

Jelen megoldásban a 38 képlet a következő alakot ölti:

$$\frac{dN}{dy} = \tau_0, \quad (40)$$

ahol τ_0 a keletkezéstől a kifagyásig eltelt sajátidő.

Bjørken [10] érdeme abban áll, hogy a korábban meglévő Hwa-féle megoldást más alakra hozta, melyből jó alsó közelítés adható a kezdeti energiasűrűsége a mértékből. Napjainkban is leginkább erre használják.

Ez is csak egydimenziós felfűvódást ír le. A következő függvényeket használja:

$$\epsilon = \epsilon(\tau, y) \quad (41)$$

$$p = p(\tau, y) \quad (42)$$

$$T = T(\tau, y) \quad (43)$$

$$u_\mu = u_\mu(\tau, y) \quad (44)$$

ahol y a rapiditás. Ez a modell is a Hwa által bevezetett sebességmezőt használja: $x_\mu/\tau = u_\mu$.

Termodinamikai megfontolásokkal, a következő összefüggést kapta Björken az állapotegyenletre:

$$\frac{\epsilon}{3p} = 1 - \frac{\beta}{3n} \frac{\partial n}{\partial \beta} \quad (45)$$

ahol $\beta = T^{-1}$. Ha az EIT nyoma nem negatív, a tágulásból következően ($T_\mu^\mu \geq 0$), abból következik, hogy $\epsilon \geq 3p$. Vagyis:

$$\frac{\partial n}{\partial \beta} \leq 0. \quad (46)$$

A kezdeti energiasűrűséget pedig az alábbiakból lehet megállapítani egységnyi rapiditás intervallumra:

$$\epsilon = \frac{\langle m_t \rangle}{(R^2 \pi \tau_0)} \frac{dn}{dy}, \quad (47)$$

ahol a dn/dy részecskeszám, az $R^2 \pi$ a felület, az $\langle m_t \rangle$ pedig az átlagos transzverz tömeg. A rendszer longitudinális mérete az kezdeti sajátidővel τ_0 közelíthető.

Elegendő a Björken esetben a végállapotot ismerni, mivel a gyorsulás hiánya miatt a rapiditás Lorentz-invariáns.

4.3. Egy egzakt és gyorsuló megoldás

Ezen megoldás [11] gyorsuló, egzakt és explicit előáll. Nagy előnye a LK megoldással szemben az explicit felírhatóság és, hogy 3+1 dimenziós. A HB megoldással szembeni előnye az, hogy gyorsuló. Ráadásul speciális esetként tartalmazza a HB megoldást, ezért számítható belőle a kezdeti energiasűrűség. Továbbá használható az ultrarelativisztikus nehézion ütközésekben lejátszódó folyamatok élettartamának becslésére és meghatározható belőle a rapiditáseloszlás (dn/dy) értéke is.

A megoldás lényege az, hogy a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit átírja Rindler-koordinátás alakba:

$$r = \tau \sinh \eta, \quad t = \tau \cosh \eta. \quad (48)$$

Ha azt a speciális esetet tekintjük, amikor $v = \tanh \Omega(\eta)$, ahol Ω a folyadékkelem rapiditása a tágulás során, a (19) - (14) egyenletek a következő alakot öltik:

$$(\kappa + 1) \frac{d\Omega}{d\eta} = -\frac{\tau}{p} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \coth(\Omega - \eta) \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad (49)$$

$$\frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{d\Omega}{d\eta} = -\frac{\tau}{p} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \tanh(\Omega - \eta) \frac{1}{p} - \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{d-1}{\sinh \eta} \frac{\sinh \Omega}{\cosh(\Omega - \eta)}. \quad (50)$$

Ezen egyenletekre a következő alakú sebesség- és nyomásmező írható fel:

$$v = \tanh(\lambda\eta) \quad (51)$$

$$p = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{\lambda d \frac{\kappa+1}{\kappa}} \left(\cosh \frac{\eta}{2} \right)^{-(d-1)\Phi\lambda} - B \quad (52)$$

Ha speciálisan $\lambda = 1, d, \kappa \in \mathbb{R}$, adódik a HB megoldás. Ha $\lambda = 2, d \in \mathbb{R}$, $\kappa = d$ egy gyorsuló d dimenziós megoldást kapunk.

4.4. Egy nemrelativisztikus megoldás

A nemrelativisztikus hidrodinamika egyenletei felírhatóak a következő alakban is:

$$\partial_t n + \nabla(n\mathbf{v}) = 0 \quad (53)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{(\nabla p)}{mn} \quad (54)$$

$$\partial_t \epsilon + \nabla(\epsilon\mathbf{v}) = -p\nabla\mathbf{v} \quad (55)$$

(vö. a (17), (19) és (20) egyenletekkel)

ahol n a részecskeszám-sűrűség, \mathbf{v} a nemrelativisztikus (NR) tágulási sebességmező, ϵ a NR energia-sűrűség, p a nyomás és a hőmérsékletet T -vel jelöljük majd.

Egy gáz állapotegyenleteit a következő alakban írjuk fel (a gázon belül lehetnek relativisztikus sebességek, ez a modell leírja azokat is. A lényeg, hogy az expanzió nem lehet túl gyors.):

$$p = nT \quad , \quad \epsilon = \kappa(T)nT \quad (56)$$

(Látható, hogy itt κ függ a hőmérséklettől. Ekkor $p/\epsilon = 1/\kappa(T)$.)

Ezen egyenleteket egy ellipszoidális szimmetriával rendelkező rendszer megold a következő alakú függvényekkel:

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0 \frac{V_0}{V} e^{-s/2}, \quad (57)$$

ahol s nem más, mint

$$s = \frac{r_x^2}{X^2} + \frac{r_y^2}{Y^2} + \frac{r_z^2}{Z^2}, \quad (58)$$

melyre igaz, hogy

$$\frac{ds}{dt} - \mathbf{v} \nabla s = 0. \quad (59)$$

s az a skálaparaméter, mely biztosítja, hogy a termodinamikai mennyiségek egy adott pillanatban állandók egy ellipszoid felszínén.

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\dot{X}}{X} r_x, \frac{\dot{Y}}{Y} r_y, \frac{\dot{Z}}{Z} r_z \right) \quad (60)$$

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{1/\kappa} \quad (61)$$

Ezek a függvények valóban megoldják a hidrodinamika fentebb említett egyenleteit, a

$$\ddot{X}X = \ddot{Y}Y = \ddot{Z}Z = \frac{T}{m} \quad (62)$$

feltétel mellett. Ezek az egyenletek adják meg a tengelyek időfejlődését.

Ennek a másodrendű nemlineáris differenciálegyenlet rendszernek létezik egyértelmű megoldása, ha adottak az X_0, Y_0, Z_0 és $\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0$ kezdeti paraméterek. Eddig még nem ismert explicit, analitikus megoldása ennek az egyenletnek, csupán numerikus.

5. A vizsgált megoldás

Jelen megoldás ellipszoidális szimmetriát feltételez. Ez az egyszerű feltevés, a táguló anyag geometriájára vonatkozik. Korábban láttuk, hogy az ütközések leírására érdemes azt a megszorítást tenni, hogy a termodinamikai mennyiségek egy felületen legyenek állandók. A NR megoldás volt az, amely már ellipszoidális szimmetriát feltételezett. A korábbi relativisztikus esetekben ezek a felületek vagy szférikus szimmetriával rendelkeztek, vagy mivel 1+1 dimenziósak voltak, semilyennel. Jelen megoldás ezt tovább fejlesztve egy táguló ellipszoidot feltételez, szintén az s skálaváltozó jó megválasztásával.

$$s = \frac{x^2}{X(t)^2} + \frac{y^2}{Y(t)^2} + \frac{z^2}{Z(t)^2} \quad (63)$$

ahol $X(t)^2, Y(t)^2, Z(t)^2$ csak az időtől függő skálaparaméterek, x, y, z pedig a koordináták.

Mivel táguló megoldást vizsgálunk, szükséges egy, a tágulást jellemző sebességmező választása is. Az asztrofizikából kölcsönözhetünk egy ilyet, nevezetesen a Hubble-sebességmezőt. Ez egy roppant egyszerű, de hatékony felírása a robbanás jellegű folyamatoknak. A sebesség arányos a távolsággal, Hubble felírásában $v = H \cdot r$. A vizsgált megoldásban kicsit másképp írjuk fel, de a jelentése ugyanaz lesz az általunk használt formulának is:

$$u^\mu = \gamma \left(1, \frac{\dot{X}}{X}x, \frac{\dot{Y}}{Y}y, \frac{\dot{Z}}{Z}z \right), \quad (64)$$

ahol $\gamma = \sqrt{1 - v^2}$. (Minden formula $c = 1, k_B = 1$ egységrendszerben értendő.) Az általam vizsgált esetben azért van szükség erre a felírásra, mert a leírni kívánt rendszer geometriája kevésbé szimmetrikus. A Hubble által felírt összefüggés gömbszimmetrikus esetben érvényes, míg jelen megoldás elliptikus szimmetriát feltételez. A fenti képlet is ezt fejezi ki.

Csörgő és társai által talált termodinamikai mennyiségek:

$$n = n_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^3 \nu(s) \quad (65)$$

$$T = T_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\frac{3}{\kappa}} \frac{1}{\nu(s)} \quad (66)$$

$$p = p_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{3 + \frac{3}{\kappa}} \quad (67)$$

ahol n a számsűrűség, T a hőmérséklet, p a nyomás és $p_0 = n_0 T_0$. Kiderült, hogy a fenti sebességmező és termodinamikai mennyiségek $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z} = ll$. feltétel mellett megoldják a hidrodinamika egyenleteit. Ekkor $X = \dot{X} \cdot t, Y = \dot{Y} \cdot t, Z = \dot{Z} \cdot t$, amiből pedig látható, hogy $u^\mu = x^\mu / \tau$, ahol x^μ a téridő négyesvektor, τ pedig a sajátidő. Ha a $\nu(s)$ skálafüggvény egy tágulást ír le:

$$\nu(s) = e^{-bs/2}. \quad (68)$$

Ahhoz, hogy a megfigyelhető mennyiségeket ki tudjunk számolni ebből a modelltől, tudnuk kell a forrásfüggvény $S(x, p)$ alakját, mely meghatározza, hogy milyen valószínűséggel van az adott részecske adott helyen, adott impulzussal. Pillanatszerű kifagyást feltételezünk: $H(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$ ahol $H(\tau)$ a hadronizációt jellemző függvény, ami csak a sajátidőtől függ.

Ez az egyszerűsítés jogos, mivel a kísérleti eredmények másodrendű fázisátalakulásról árulkodnak, azaz nincs látens hő, mint például a víz elforralásánál.

Az ilyen forrásfüggvényeket a Maxwell – Boltzmann - eloszlásból számoljuk:

$$S(x, p) = \mathcal{N} e^{-\frac{mv(x,t)^2}{k_B T(x,t)}} = \mathcal{N} e^{-\frac{p(x,t)v(x,t)}{k_B T(x,t)}}, \quad (69)$$

Természetesen jelen esetben a relativisztikus mennyiségek kerülnek az exponensbe, vagyis a relativisztikus Maxwell–Jüttner-eloszlást kell használni. Így:

$$\int_{\mathbb{R}^4} S(x, p) d^4 x = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{N} n e^{\left[-\frac{p_\mu u^\mu}{T(x)} \right]} H(\tau) d\tau p_\mu d^3 \Sigma_\mu(x), \quad (70)$$

ahol $d^3\Sigma_\mu(x)$ a kifagyási felület vektormértéke, mely a p^μ relativisztikus impulzussal Lorentz-szorozva a részecskék fluxusát kapjuk. \mathcal{N} normálási faktor. A felírásban itt is éltem a $k_B = 1, c = 1$ egységrendszer kényelmével.

Mivel ebben a megoldásban a kifagyás konstans τ mellett történik ezért a Cooper–Frye-formula szerint a $d^3\Sigma_\mu(x) = \frac{u_\mu d^3x}{u^0}$, és $d\tau = u^\mu dx_\mu$, a forrásfüggvényt a következő alakban írhatjuk:

$$S(x, p)d^4x = \mathcal{N}ne^{\left[-\frac{p_\mu u^\mu(x)}{T(x)}\right]} H(\tau) \frac{p_\mu u^\mu}{u^0} d^4x. \quad (71)$$

Ezen forrásfüggvény integrálásával adódnak a mérhető mennyiségek.

5.1. A mérhető mennyiségek számolása – főbb vonalakban

A most következő számolást a [12] cikk részleteiben tartalmazza, ezért itt csak a főbb lépésekre térek ki, amik szükségesek a mérhető mennyiségek kiszámításának megértéséhez.

5.1.1. A transzverz impulzuseloszlás

A detektoraink olyanok, hogy csak a kifagyott hadronokat tudják detektálni, azaz a keletkezés helyét nem tudhatjuk, csak az impulzusukat. További technikai részlet, hogy az impulzuseloszlásból is csak a transzverz irányút tudjuk jól érzékelni ($p_z = 0$), ezért csak a p_t -vel jelölt, az (x, y) síkban lévő ϕ szögtől független transzverz impulzust számoljuk ki.

A forrásfüggvényünk nem alkalmas arra, hogy belőle az adatokkal összehasonlítható eredményeket kapjunk. A forrásfüggvényből megkapható az impulzus, ha kiintegrálom az egész térre, hisz maga a forrásfüggvény csökk azt mondja meg, hogy hány részecske tartózkodik p és $p+dp$ impulzustérbeli intervallumban. Vagyis definíció szerint:

$$N_1(p) = \int_{\mathbb{R}^4} S(x, p). \quad (72)$$

Ha a (71) forrásfüggvényt tekintjük, nyeregpontri közelítést alkalmazva kiszámítható az integrál.

Bevezetve a

$$T_x = T_0 + \frac{ET_0\dot{X}_0^2}{b(T_0 - E)} \quad (73)$$

$$T_y = T_0 + \frac{ET_0\dot{Y}_0^2}{b(T_0 - E)} \quad (74)$$

$$T_z = T_0 + \frac{ET_0\dot{Z}_0^2}{b(T_0 - E)} \quad (75)$$

effektív hőmérsékleteket, következő adódik:

$$N_1(p) = \int_{\mathbb{R}^4} S(x, p) d^4x = \bar{N} \cdot \bar{E} \cdot \bar{V} \cdot e^{\left[\frac{p_x^2}{2ET_0} - \frac{p_x^2}{2ET_0} - \frac{p_y^2}{2ET_0} - \frac{p_z^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0} \right]}, \quad (76)$$

ahol

$$\bar{N} = \mathcal{N}n_0 \left(\frac{2T_0\tau_0^2\pi}{E} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (77)$$

$$\bar{E} = \left(E - \frac{p_x^2 \left(1 - \frac{T_0}{T_x}\right)}{E} - \frac{p_y^2 \left(1 - \frac{T_0}{T_y}\right)}{E} - \frac{p_z^2 \left(1 - \frac{T_0}{T_z}\right)}{E} \right), \quad (78)$$

$$\bar{V} = \sqrt{\left(1 - \frac{T_0}{T_x}\right) \left(1 - \frac{T_0}{T_y}\right) \left(1 - \frac{T_0}{T_z}\right)}. \quad (79)$$

Mivel a detektorok olyanok, hogy 0 rapiditásnál vett η eloszlást tudnak jól mérni, ezért bevezethető

$$p_t = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad (80)$$

ahol

$$p_x = p_t \cos \phi, \quad (81)$$

$$p_y = p_t \sin \phi. \quad (82)$$

Ezeket a (76) egyenletbe helyettesítve és néhány átalakítást elvégezve, bevezetve az alábbiakat:

$$w = \frac{p_t^2}{4E} \left(\frac{1}{T_y} - \frac{1}{T_x} \right) \quad (83)$$

$$\frac{1}{T_{\text{eff}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_y} \right) \quad (84)$$

és szétbontva az exponenciális függvényt szögfüggő és nem függő részekre, a következőt kapjuk:

$$N_1(p_t, \phi) = \overline{NEV} e^{w \cos 2\phi} e^{\left[-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}\right]}. \quad (85)$$

Felismerve \overline{E} átalakításában a módosított Bessel-függvényekre vonatkozó

$$I(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w \cos 2\phi} \cos(2n\phi) d\phi \quad (86)$$

azonosságot a ϕ szerinti integrálás elvégezhető a következő kifejezésben:

$$N_1(p_t, \phi) = \overline{NV} \left(E - \frac{p_t^2}{E} + \frac{p_t^2 T_0}{ET_{\text{eff}}} - 2T_0 w \cos 2\phi \right) e^{w \cos 2\phi} \cdot \left[-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0} \right] \quad (87)$$

Végül a következőt kapjuk:

$$N_1(p_t) = \overline{NV} \int_0^{2\pi} \overline{E} e^{w \cos(2\phi)} d\phi e^{\left[-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}\right]} \quad (88)$$

Ami nem más, mint:

$$\overline{NV} e^{\left[-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}\right]} \left(\left(E - \frac{p_t^2 (T_{\text{eff}} - T_0)}{ET_{\text{eff}}} \right) I_0(w) - 2T_0 I_1(w) \right). \quad (89)$$

Mivel a w az adatok paraméter-tartományában kicsi, ezért $I_0(w) \approx 1$, $I_1(w) \approx 0$. Így jutunk a transzverz impulzus-eloszlás végső alakjához:

$$N_1(p_t) = \overline{NV} \left(E - \frac{p_t^2 (T_{\text{eff}} - T_0)}{ET_{\text{eff}}} \right) e^{\left[-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}\right]}. \quad (90)$$

A $p_z = 0$ feltétel miatt az energiát az ún. transzverz tömeggel helyettesítjük:
 $m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}$

5.1.2. Az elliptikus folyás

Természetesen minket a szögfüggő eloszlások is érdekelhetnek. Ha Fourier-sorba fejtjük a (89)-et:

$$N_1(p) = N_1(p_t) \left[1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\phi) \right] \quad (91)$$

A mérések azt mutatják, hogy a sorfejtés második komponensét kivéve, a többi elhanyagolható. Így minket csak ez, a térbeli aszimmetriát leíró tag érdekel.

Kezdetben tehát a folyadék térbeli aszimmetriával rendelkezik, mely az időfejlődés során impulzustér-beli aszimmetriát okoz. Ezt tudjuk mérni. (Történetileg is érdekes, hogy a gáznak gondolt kvark-gluon plazma esetére $v_2 = 0$ lenne.)

$$v_2 = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi N_1(p_t, \phi) \cos(2\phi)}{\int_0^{2\pi} d\phi N_1(p_t, \phi)} \quad (92)$$

Ezen integráloknál is felhasználhatók a Bessel-függvények és tulajdonságaik. Ha alkalmazzuk a következőket: $I_1(x) \approx 2xI_0(x)$ és $I_2(x) \approx 0$, akkor a következőre jutunk:

$$v_2(p_t) = \frac{I_1(w)}{I_0(w)} \left(1 + \frac{2T_0}{E - \frac{p_t^2(T_{\text{eff}} - T_0)}{ET_{\text{eff}}}} \right) \quad (93)$$

Természetesen az energia itt is az m_t transzverz tömeggel helyettesítendő. A nem relativisztikus megoldásból kiszámolt megfigyelhető mennyiségek alakja hasonló az itt kiszámoltakhoz.

5.1.3. Kétrészecske korreláció (HBT)

Ez a mennyiség szintén történeti érdekesség. Eredetileg kvazárok szögátmérőjének meghatározására használt módszer, mely azonban a nehézion-fizika területén is sikeresnek bizonyult.

Lényegében arról van szó, hogy a kétrészecske impulzuseloszlást nem figyelhetjük meg úgy, mint két külön részecske impulzuseloszlásának összegét, mert a hullámfüggvényük interferál. Bozonikus részecskék esetén ez adja a Bose-Einstein korrelációt (fermionok esetén Fermi-Dirac típusú korreláció figyelhető meg).

Ez a módszer értékes információkat szolgáltat a forrás geometriájáról; lényegében az egyetlen út, mellyel képet alkothatunk a forrásról.

A kétrészecske korrelációs együtthatót a következő képlet definiálja:

$$C_2(p_1, p_2) = \frac{N_2(p_1, p_2)}{N_1(p_1) \cdot N_2(p_2)}, \quad (94)$$

ahol $N_2(p_1, p_2)$ a kétrészecske impulzuseloszlás függvénye, mely tartalmazza a kvantummechanikából következő interferencia-tagot. Ahhoz, hogy a forrásfüggvény és a korrelációs függvény között kapcsolatot teremtsünk, vennünk kell a forrásfüggvény Fourier-transzformáltját a $p_1 \approx p_2$ feltétellel. Így kapjuk

$$S(q, K) = \int S(x, K) e^{iqx} dx^4 \quad (95)$$

összefüggésen keresztül

$$C_2(q, K) = 1 + \left| \frac{\tilde{S}(q, K)}{\tilde{S}(0, K)} \right|^2 \quad (96)$$

ahol bevezethető a $K = \frac{p_1+p_2}{2}$ átlagos impulzus és a $q = p_1 - p_2$. További egyszerűsítés az a matematikai tény, hogy bármely függvény Fourier-transzformáltja a nullában nem más, mint a függvény integrálja, jelen esetben Riemann-integrálja:

$$\tilde{S}(0, K) = N_1(K) \quad (97)$$

Felhasználva a (76) -t, néhány integrálást elvégezve a $q \ll K$ feltételt szabva a következőre jutunk:

$$C_2(q, K) = 1 + e^{[-(R_x^2 q_x^2 + R_y^2 q_y^2 + R_z^2 q_z^2)]} \quad (98)$$

képletet kapjuk, ahol R_x, R_y, R_z a korrelációs sugarak. Ha nem pillanatszerű kifagyást feltételeztünk volna, akkor az exponensben még kaptunk volna egy $R_0^2 q_0^2$ tagot. Ez a tag az R_{out} -ba adott volna járulékot, azonban R_{side} -ba nem. Így viszont a két tag egyenlő.

A korrelációs sugarak a Gauss-közelítés miatt a forrás látszólagos méretét adják:

$$R_x^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_x - T_0)}{E_K T_x} \quad (99)$$

$$R_y^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_y - T_0)}{E_K T_y} \quad (100)$$

$$R_z^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_z - T_0)}{E_K T_z} \quad (101)$$

ahol E_K az átlagos K impulzushoz tartozó kinetikus energia (N.B. $p_z = 0$), T_x, T_y, T_z pedig az átlagos impulzusnál vett effektív hőmérséklet. A szokásos Bertsch – Pratt-féle koordináta-rendszer használatos, az elnevezések is ezt tükrözik (*out* – a részecsképár átlagos transzverz impulzusának iránya, *long* – z tengely iránya, *side* – előző kettőre merőleges, szintén a transzverz síkban).

Az illesztések során a következő összefüggések használatosak:

$$R_{out}^2 = R_{side}^2 = \frac{R_x^2 + R_y^2}{2} \quad (102)$$

$$R_{long}^2 = R_z^2 \quad (103)$$

Az illesztésnél bevezethetők a következő mennyiségek:

$$\epsilon = \frac{\dot{X}_0^2 - \dot{Y}_0^2}{\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2} \quad (104)$$

és

$$\frac{u_t^2}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\dot{X}_0^2} + \frac{1}{\dot{Y}_0^2} \right) \quad (105)$$

Az elliptikus folyásnál az impulzustérbeli aszimmetriát jelöli az ϵ , míg az impulzus-eloszlásnál az átlagos transzverz sebesség u_t^2/b .

Paraméterek	Értékek
T_0 [MeV]	199 \pm 3
ϵ	0,80 \pm 0,02
$\frac{u_t^2}{b}$	-0,84 \pm 0,08
τ_0 [fm/c]	7,7 \pm 0,1
\hat{Z}_0^2/b	-1.6 \pm 0,3

1. táblázat. A spektrum és a HBT sugarak illesztése a RHIC PHENIX esetén [13], [14] .

Paraméterek	Értékek	Hibáik
T_0 [MeV]	204	\pm 7
ϵ	0,34	\pm 0,01
$\frac{u_t^2}{b}$	-0,34	\pm 0,01

2. táblázat. Az elliptikus folyás illesztése a RHIC PHENIX adatokra [15].

5.1.4. A RHIC adatok illesztésének rekonstruálása

Ahhoz, hogy egy jól működő kódot tudjak írni, nagy segítségemre volt, hogy a RHIC adatok illesztése rendelkezésemre állt. A cél az volt, hogy az ábrákat és a paramétereket, elsősorban a paramétereket, újra sikerüljön előállítani. Csupán jelzés értékkel álljanak itt az általam illesztett paraméterekkel készített 2, 3 és 4 ábrák valamint [12] cikkben illesztett paraméterek értékei az 1, 2 táblázatban (a későbbiekben érdekes lesz összehasonlítani az általam kapott eredményekkel).

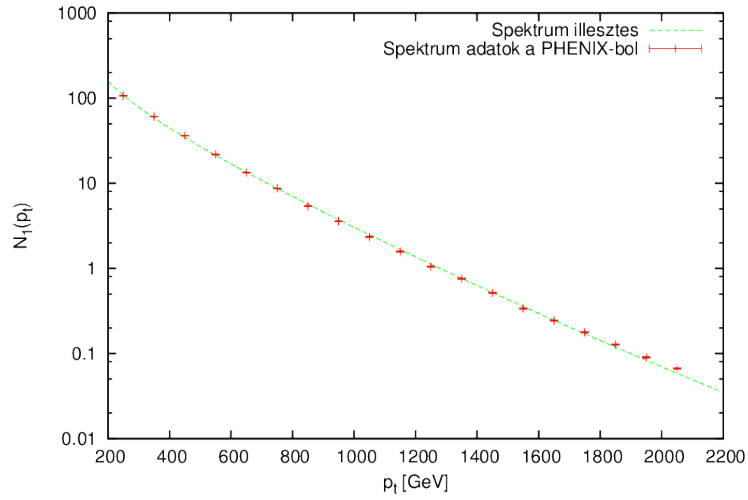
Az illesztések során itt is, mint az ALICE adatoknál a *Minuit* programcsomagot használtam a minimalizálásra. Az eljárásról a Függelékben található néhány gondolat.

6. A mérhető mennyiségek illesztése az LHC adatokra

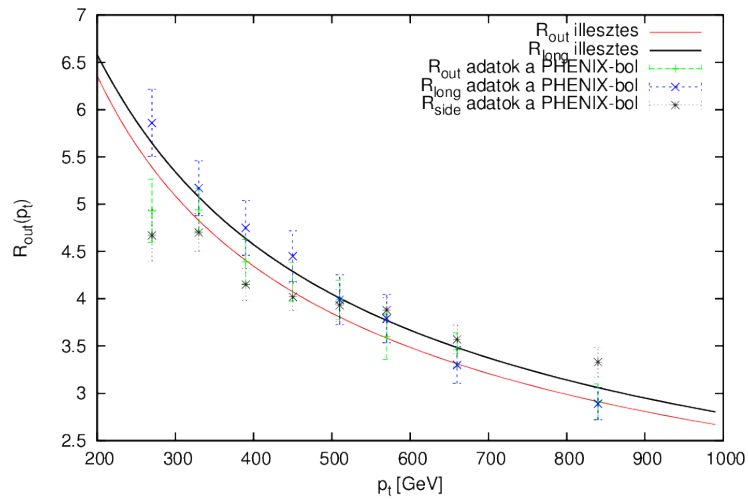
A RHIC adatsorainak illesztése után lássuk az ALICE adatokat. Jelen dolgozatban azt mutatom meg, hogyan alkalmaztam ugyanezt a megoldást az LHC ALICE nehézion ütköztetőjéből nyert adatokra, sikeresen.

Az adatok illesztésénél számítottam arra, hogy egy kicsit magasabb hőmérsékletet kaphatok és arra is, hogy a rendszer excentricitása nagyobb lehet (vagyis ϵ értékét magasabbra vártam mint a RHIC esetében). Kezdő értéknek az illesztéshez a RHIC által szolgáltatott paramétereket választottam. Ezzel az illesztés sikeresen ment. Meglepő volt azonban a magas központi hőmérséklet s a nagy excentricitás. A transzverz irányú sebesség (u_t^2/b) is magas értékre adódott. Külön érdekesség, hogy az elliptikus folyásnál ezek az értékek nagyon eltérőek. Ez az oka annak, hogy külön kellett illeszteni. Az illesztett paraméterek bemutatása során foglalom össze a tapasztalatokat.

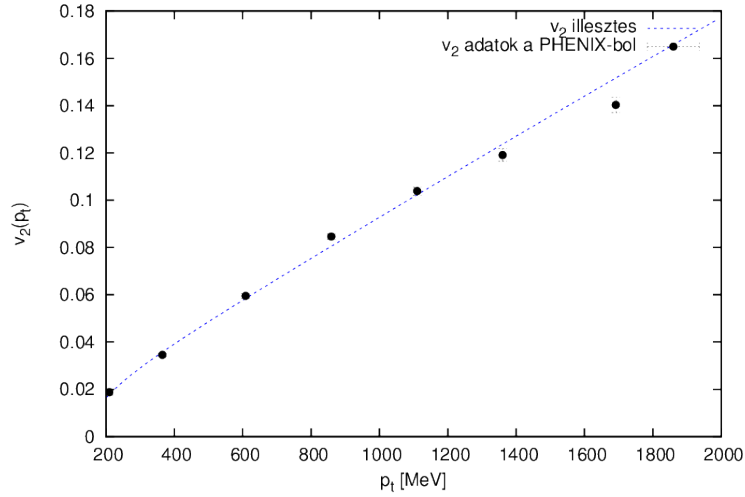
Az illesztés elvégzéséhez először is írtam egy *C++* kódot a *Minuit* minimalizáló programcsomag segítségével. Ezzel illesztettem a megoldásból származó eredm-



2. ábra. A spektrum illesztése a RHIC PHENIX adatokra.



3. ábra. A HBT sugarak illesztése a RHIC PHENIX adatokra.



4. ábra. Az elliptikus folyás illesztése a RHIC PHENIX adatokra.

Paraméter	Értéke	Hibája
T_0	270.67	± 2.7
ϵ	0.95	± 0.04
$\frac{u^2}{b}$	-1.44	± 0.22
τ_0	8.10	± 0.22
Z_0^2	-10	rögz.

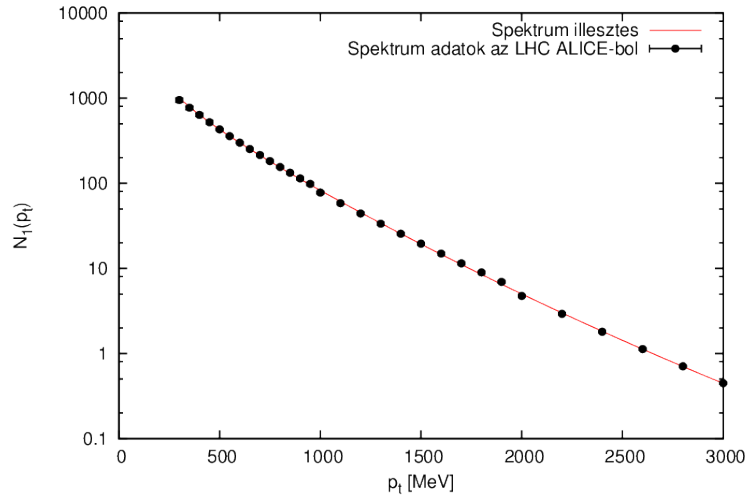
3. táblázat. A spektrum és HBT sugarak illesztése az LHC ALICE detektor esetén

nyeket. Egy kódot írtam spektrumra, a HBT sugarakra és az elliptikus folyásra is, csak két külön bemeneti paramétereket tartalmazó fájlt hoztam létre, melyekkel külön tudtam illeszteni ezeket (Függelék.).

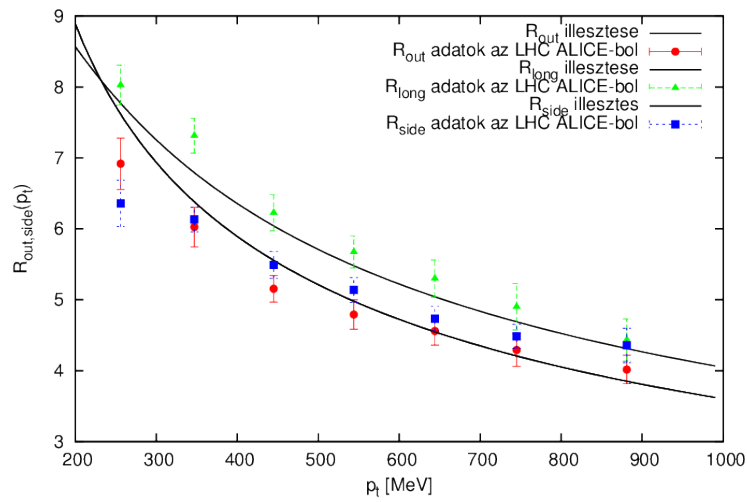
6.1. Az eredmények

Az illesztett paramétereket és értékeiket a (3), (4) táblázat foglalja össze, valamint a 5, 6 és 7 ábra mutatja.

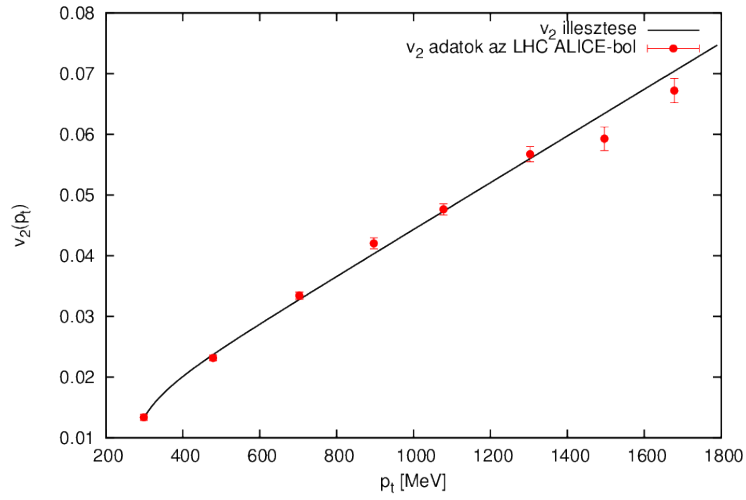
Az elliptikus folyást külön kellett illeszteni, mert ennél a mennyiségnél már más részecskék illetve effektusok is szerepet játszhatnak.



5. ábra. A spektrum illesztése az LHC ALICE adatokra. Az függőleges tengely logaritmikus beosztású.



6. ábra. A HBT sugarak illesztése az LHC ALICE adatokra. Az elméletből adódik, hogy $R_{out} = R_{side}$ és $R_{long} = R_z$



7. ábra. Az elliptikus folyás illesztése az LHC ALICE adatokra.

Paraméter	Értéke	Hibája
T_0	272.86	± 10.0
ϵ	0.231	± 0.123
$\frac{u_x^2}{b}$	-0.300	± 0.023

4. táblázat. Az elliptikus folyás illesztése az LHC ALICE detektor esetén

7. Összefoglalás

Láthattuk, hogy az elméleti eredmények az LHC ALICE detektorának adataira is alkalmazhatóak. Nem is meglepő, hogy az elliptikus folyást nem sikerült együtt illeszteni a spektrummal és a HBT sugarakkal, hisz az elliptikus folyásban más részecskék is szerepet játszhatnak és jelen dolgozatban elemzett adatok hadron adatok, nem egyes részecskékre vonatkoznak. Ez az eredmény született a RHIC esetében is, de ott a vizsgált ütközések centralitása volt különböző.

Ami a két gyorsító eredményeit szignifikánsan megkülönbözteti, az az ALICE magasabb kezdeti hőmérséklete valamint a spektrumban és a HBT sugarakban megfigyelhető különbségek. Ezek arra utalnak, hogy az LHC-ban egy lapultabb, elnyúltabb ellipszoid jött létre. Az 1.ábra épp egy ilyen elnyúlt ellipszoidot mutat. (Azt, hogy épp X nyúlt el, az $\epsilon > 0$ -ból és a (105)-as egyenletből láthatjuk.)

A nagyobb kifagyási hőmérséklet (T_0), de az alig változott kifagyási idő (τ), arra enged következtetni, hogy az LHC esetében ellipszoidban sokkal nagyobb a hőmérsékleti gradiens, mint a RHIC-ben volt.

Fontos a korábban említett tény, miszerint ezek az adatok nem azonosított részecskék adatai. Ezért nem lehet figyelembe venni olyan hatásokat, melyeket kiszűrve, a spektrum a HBT sugarak és az elliptikus folyás egyszerre illeszthetőek lennének. Éppen ezért izgalmas lesz ezeket az eredmények összehasonlítani az azonosított részecskés adatokkal.

8. Függelék

8.1. Térelemélet

A téreleméletet jelen esetben folyadékokra alkamazzuk. Jelen függelék célja a Lagrange- és az Euler-koordináták bemutatása, nagy vonalakban, a teljesség igénye nélkül.

8.1.1. Lagrange-koordinátázás

A Lagrange-koordináta egy tömegelemmel együtt mozog, az elmozdulás tér egy pontja. Kezdeti feltételnek egy t_0 időpillanatban kiválasztott r_0 koordináta számít, ez azonosítja a tömegelemet. A sebességet és a gyorsulást:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (106)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (107)$$

összefüggések adják.

8.1.2. Euler-koordinátázás

Ahhoz, hogy áttérjünk a Lagrange-koordinátákról az Euler-koordinátákra a

$$\mathbf{v}_E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), t) \quad (108)$$

vagy az Euler-képből a Lagrange-képbe való áttéréshez

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t) \quad (109)$$

függvényt keressük. A totális derivált a Lagrange-képbeli mező időderiváltja Euler-képben. Tömören jelölve:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{F} \quad (110)$$

ahol \mathbf{F} egy Lagrange-képbeli mező.

Látjuk tehát, hogy a konvektív tag tulajdonképpen egy áttérés egy másik képbe.

Ha bevezetjük \mathbf{J} Jacobi-mátrixot és annak determinánsát J -t

$$J_{ab} = \frac{\partial u_a}{\partial r_b} \quad (111)$$

alakban, akkor kapjuk

$$\rho d^3 u = \rho J d^3 r = \rho_0 d^3 r \quad (112)$$

amiből látható, hogy

$$\rho = \frac{\rho_0(\mathbf{r})}{J(\mathbf{r}, t)} \quad (113)$$

Ezek után ha a szövegben említett Λ LSF-t helyettesítjük az Euler – Lagrange-egyenletbe (ELE), akkor a deriváltak külön-külön kiírva:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_a} = 0 \quad (114)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,t}} = \rho_0 v_a \quad (115)$$

Itt $u_{a,t} = \frac{\partial u_a}{\partial t}$ jelölést vezetjük be. Többször lényegesen megkönnyíti a jelölést.

Itt fontos még egy közbevetés. Az adiabatikusság miatt a pálya mentén az entrópia állandó. Vagyis a termodinamika I. főtétele a következő alakot ölti:

$$d\epsilon = \frac{pd\rho}{\rho^2} \quad (116)$$

Ezt a következőkben felhasználjuk.

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u_{a,b}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial J_{ab}} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial J_{ab}} \epsilon \left(\frac{\rho_0}{J}, s_0 \right) = \frac{\rho_0^2}{J^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \frac{\partial J}{\partial J_{ab}} = p J J_{ba}^{-1} \quad (117)$$

Vagyis ha behelyettesítjük, megkapjuk (11).

8.2. Alkalmazott módszerek

A kód felépítése a következő: a megoldásból származó függvények deklarálása után a χ^2 függvényt definiáltam minden adatsorra külön. Ezután fájlból hívtam be az adatokat egy-egy tömbbe és az illesztendő paramétereket a *Minuit* változóinak. Ezek a paraméterek is külön fájlban találhatóak a könnyebb kezelhetőség érdekében. Így ha változtatni kell azokon, nem a kódot kell átírni, hanem csak a bemeneti fájlt. A *Minuit*-nak meg kellett adni rendre a változó nevét, a kezdő értékét, a minimum és maximum értékeket és a maximális hibát. Nem érdemes túl szoros határokat megadni, mert akkor nem konvergál az illesztés. A módszer, amellyel eljárta az volt, hogy egyszerre csak egy paramétert illesztettem szabadon, a többi fixáltam. Amikor sikerült beállítani, cseréltem. A kapott értékre lefixáltam és egy másik paramétert illesztettem. Lefuttatás után a *Minuit* program a terminálablakra kiírta az illesztett paraméterek értékeit hibáikkal együtt. Az elvégzett illesztés után minden függvényt helyettesítési értéke az adott pont-ban bekerült egy adatfájlba. Ezután egy *Gnuplot* script segítségével ábrázolhatók az illesztett görbék és az adatok.

Az illesztéshez használt függvényeket a következőképp definiáltam, például a spektrum:

```

double N1(double m, double pt, double T0, double X0v2b, double Y0v2b,
double Z0v2b, double tau0, double Norm)
{ double e = E(m,pt);
double h = (pt*pt)/(2*e);
double teff = Teff(m,pt,T0,X0v2b,Y0v2b);
double Tx = Ti(T0,X0v2b,e);
double Ty = Ti(T0,Y0v2b,e);
double v = V(m,pt,T0,X0v2b,Y0v2b,Z0v2b,tau0);
double n = pow(2.0*T0*tau0*tau0*MPI/e,1.5 );
double w = h/2*(Tx-Ty)/(Tx*Ty);
double i0 = I0(w);
double i1 = I1(w);
double c = (e-(pt*pt*(teff-T0))/(e*teff))*i0-2*w*T0*i1;
return
(
Norm*2*MPI*n*v*c*
exp(-h/teff+h/T0-e/T0)
);
}

```

Két bemeneti fájl tartalmazta a paramétereket, melyekben a következőképpen határoztam meg, hogy mely függvények illesztődjenek.

A kód elején létrehoztam tömböket, melyeknek a függvényre jellemző nevük volt: `N1dat`, `Rodat` stb. Amikor a `Minuit`-hez tartozó minimalizáló χ^2 függvényt definiáltam (FCN), abban minden függvényhez, melyet illesztettem, tartozott egy `for` ciklus, melynek felső korlátja épp ennek a tömbnek a mérete. Például a `v2dat`-ra így nézett ki az FCN-ben a ciklus:

```

for(int i=0;i<v2dat;i++)
{
double pt = pt1[i];
double data = dat1[i];
double error = err1[i];
double m = 140;
double X0v2b = ut2b/(1-eps);
double Y0v2b = ut2b/(1+eps);
double theory = v2(m,pt,T0,tau0,X0v2b,Y0v2b);
double chi = (data-theory)/error;
f += chi*chi;
}

```

A függvények definiálása után az adatokat hívtam be melyen a `Minuit` elvégezte a minimalizálást a megadott függvényekkel. Ezután az illesztett görbe adatsora kiíródott egy fájlba melyet egy `Gnuplot` scripttel lehetett ábrázolni. Már a `Minuit` függvény hívásakor a kódba beleírtam a lehetőséget annak, hogy esetleg az adott paramétert nem illeszttem. Ezt úgy tettem, hogy a bemeneti fájlban minden a függvényre vonatkozó `for` ciklusnak az FCN-ben a felső határát meg

lehet választani. Eldönthetem hány pontot szeretnék az illesztésbe belevenni. Például ha a bemeneti fájl a következőképpen néz ki:

```
T0 200 1 0 0
eps 0.32 0.1 0 0
ut2b -0.32 0.1 0 0
tau0 7.0 0.1 0 0
Z0v2b 10 0 0 0
v2dat 0
```

akkor az azt jelenti, hogy a `v2dat` tömbből az első nulla elemet illeszttem, vagyis nem illeszttem ezt a függvényt. Ez a megoldás azért is előnyös, mert ha esetleg ki akarjuk hagyni az utolsó pár pontot az illesztésből, csak beírjuk, hogy hány pontot tartunk fontosnak és csak azok lesznek illesztve. Anélkül tudunk kihagyni mérési adatpontokat, hogy az adatfájlba beleírnánk, elkerülve az esetleges adatvesztést.

Hivatkozások

- [1] K. Adcox *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 022301 (2002) [arXiv:nucl-ex/0109003].
- [2] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 072301 (2003) [arXiv:nucl-ex/0304022].
- [3] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 072303 (2003) [arXiv:nucl-ex/0306021].
- [4] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 162301 (2007) [arXiv:nucl-ex/0608033].
- [5] K. Adcox *et al.*, Nucl. Phys. **A757**, 184 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410003].
- [6] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 172301 (2007) [arXiv:nucl-ex/0611018].
- [7] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 132301 (2010) [arXiv:0804.4168].
- [8] S. Belen'kji and L. Landau, Il Nuovo Cimento (1955-1965) **3**, 15 10.1007/BF02745507 (1956).
- [9] R. C. Hwa, Phys. Rev. D **10**, 2260 (1974).
- [10] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).
- [11] T. Csorgo, M. I. Nagy, and M. Csanad, Phys. Lett. **B663**, 306 (2008) [arXiv:nucl-th/0605070].
- [12] M. Csanád and M. Vargyas, The European Physical Journal A - Hadrons and Nuclei **44**, 473 10.1140/epja/i2010-10973-3 (2010).
- [13] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. **C69**, 034909 (2004) [arXiv:nucl-ex/0307022].
- [14] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 152302 (2004) [arXiv:nucl-ex/0401003].
- [15] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 182301 (2003) [arXiv:nucl-ex/0305013].