

# Tűzgömb hidrodinamika relativisztikus megoldásainak vizsgálata az LHC nehézion-ütközéseinek leírásához

Lökös Sándor

Fizika BSc III.  
fizikus szakirány

Témavezető: Csanád Máté

ELTE, Atomfizikai Tanszék



ELTE TTK  
Budapest, 2012.

# Tartalomjegyzék

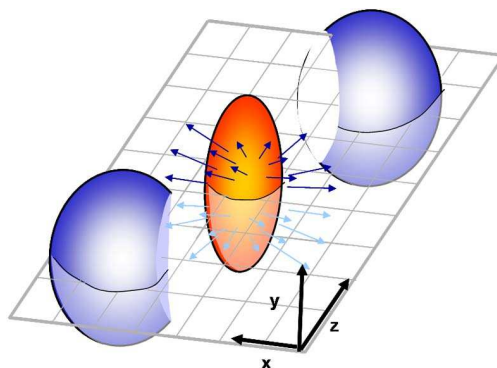
<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>2. A nehézion-fizika eredményei</b>	<b>3</b>
<b>3. Hidrodinamikai áttekintés</b>	<b>5</b>
3.1. A klasszikus hidrodinamika . . . . .	5
3.2. A relativisztikus hidrodinamika . . . . .	7
<b>4. 1+1 dimenziós megoldások</b>	<b>9</b>
4.1. Landau–Khalatnikov-megoldás . . . . .	9
4.2. Hwa–Bjorken-megoldás . . . . .	10
4.3. Bialas–Janik–Peschanski-megoldás . . . . .	12
4.4. Nagy–Csörgő–Csanád-megoldás . . . . .	13
<b>5. Egy 3+1 dimenziós megoldás</b>	<b>15</b>
5.1. Csörgő–Csernai–Hama–Kodama-megoldás . . . . .	15
5.2. Mérhető mennyiségek . . . . .	15
5.3. Mérhető mennyiségek konstans hőmérséklet profil esetén . . . . .	21
<b>6. Illesztés az LHC adatokra</b>	<b>23</b>
6.1. Az eredmények . . . . .	23
6.2. Az eredmények konstans hőmérsékletprofil esetén . . . . .	23
<b>7. Realisztikus állapotegyenletek</b>	<b>24</b>
7.1. Megmaradó részecskeszám . . . . .	24
7.2. Nem-megmaradó részecskeszám . . . . .	27
7.3. Nyomásfüggő állapotegyenlet . . . . .	28
7.4. Megoldások vizsgálata a rács-QCD segítségével . . . . .	30
<b>8. Összefoglalás</b>	<b>33</b>
<b>9. Köszönetnyilvánítás</b>	<b>33</b>
<b>10. Függelék</b>	<b>34</b>
10.1. A hidrodinamika térelméleti levezetése . . . . .	34
10.2. Alkalmazott módszerek . . . . .	37

## 1. Bevezetés

Az Ősrobbanás után egy mikroszekundummal olyan anyag töltötte ki az akkor még nagyon forró Univerzumot, amit ma nagyenergiás részecskegyorsítókban (RHIC, CERN) elő tudunk állítani. Ekkor ugyanis a Világegyetem annyira forró volt, hogy a kvarkok és a gluonok, az erős kölcsönhatást közvetítő részecskéi, egy plazmát alkottak, melyet *kvark-gluon plazmának* (QGP) nevezünk. Az erős kölcsönhatás olyan részecskék között hat, mint a kvarkok. Az erős kölcsönhatás töltését *színtöltésnek* nevezzük. Minden kvarknak van antikvark párja is, mely antiszínrel rendelkezik. A kvarkok az adaptív színkeverésnek megfelelően alkothatnak kötött állapotokat. Három (anti)kvark alkot egy (anti)bariont, például (anti)protont, míg egy kvark-antikvark pár egy mezont. Ezeket összefoglaló néven hadronoknak, az átmenetet pedig, amikor a kvarkok összeállnak hadronokká, hadronizációnak nevezzük. [1].

Az átmenet előtt a kvarkok és a gluonok egy plazmát alkotnak, melynek tulajdonságaival kapcsolatban az elmúlt években jelentős felfedezéseket tettek, ahogy az a 2. fejezetben olvasható. Számos tulajdonságát az adatokkal jól egyező módon le lehet írni. Az egyik olyan modell, mely sikeresnek bizonyult a hidrodinamikai kép. A hidrodinamikai képből származó modellek a QGP-t, mint egy tökéletes, rendkívül kis viszkozitású, táguló folyadékot képzelik el. A modellek sikerességét bizonyítja, hogy a folyadékként elképzelt QGP térbeli, ebből következően impulzustérbeli aszimmetriával rendelkezik, míg a gázként elképzelt QGP nem rendelkezik impulzustérbeli azimutális aszimmetriával. Ezt méri a későbbiekben részletesen tárgyalt azimutális aszimmetria vagy másképp *elliptikus folyás* nevű mennyiség. Az elképzések szerint a nehézion ütközések nyomán kialakult QGP ellipszoidális szimmetriával rendelkezik; ez látható a 1. ábrán.

A dolgozat egy olyan relativisztikus hidrodinamikai modellt mutat be, mely ellipszoidális szimmetriát feltételez. Ezt a modellt alkalmazom az LHC adataira. Kiszámolom a mérhető mennyiségeket konstans és nem konstans hőmérsékletprofil mellett is, melyeket illeszték az adatokra. Bemutatok néhány lehetséges általánosítást, ahol az eredeti modellben szereplő  $c_s$  konstans hangsebesség a hőmérséklettől fog függeni. Ez egy olyan lehetséges általánosítás, mely reális állapotegyenlettel számol. A hűlő anyagban nem biztos, hogy a  $c_s = \text{konstans}$  jó közelítés, ugyanis fizikai rendszerekben a hangsebesség általában függ a hőmérséklettől; itt is ezt várjuk.



1. ábra. Az ellipszoidális szimmetria szemléltetése nehézion ütközésekben [1]. A tovább haladó részeket spektátoroknak, míg az ellipszoidot alkotó részt participánsnak hívjuk. Látható, hogy az ütközés a  $z$ -tengely mentén történt. Az  $x - y$  síkot nevezzük transzverz síknak. Általában ebben vizsgáljuk a megfigyelhető mennyiségeket.

## 2. A nehézion-fizika eredményei

A Relativisztikus Nehézion Ütköztetőnek (RHIC) több nevezetes felfedezése is volt a QGP kutatása során, mely felfedezések a kutatási terület mérföldköveinek számítanak.

Az első mérföldkő az ún. *jet quenching* (2.ábra), vagy jet elnyomás jelenségének megfigyelése volt [2–4]. A jelenség lényege, hogy nehézion ütközések (pl. arany-arany) során keletkező nagy impulzusú részecske-nyalábokból (*jetekből*) kevesebbet észleltek, mint amennyire számítani lehetett, ahogy az alább részletezésre kerül. Ez a jelenség akkor játszódott le, amikor az atommagok centrálisan ütköztek. Periferikus ütközéseknél nem figyelték meg (ld. 2. ábra).

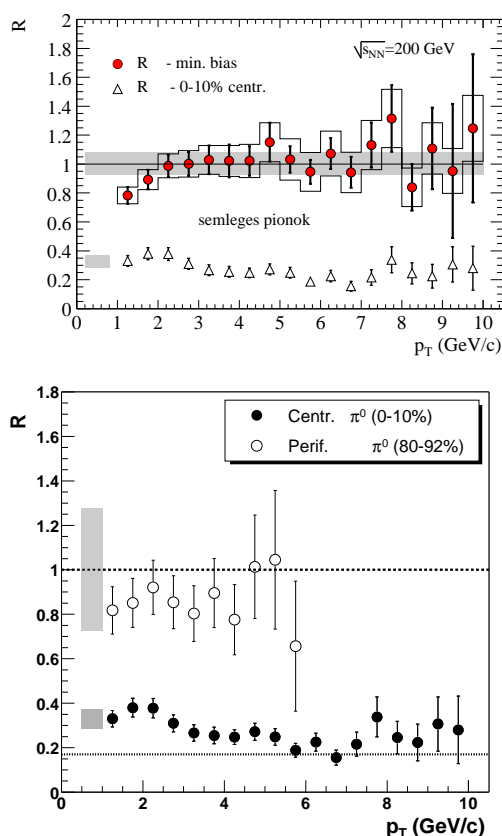
A részletes vizsgálat során bevezették az ún. nukleáris modifikációs faktort, ahogy az (1) egyenlet szemlélteti, mely azt mérte, hogy arany-arany ütközésekből keletkező részecskék száma hogyan aránylik a proton-proton ütközésekből keletkező részecskék számával.

$$R_{AA} = \frac{1}{N_{\text{Bin.üt.}}} \frac{N_{A+A}}{N_{p+p}} \quad (1)$$

ahol  $N_{\text{Bin.üt.}}$  az elméletileg jóslott ütközések száma az atommagok alkotórészei között,  $N_{p+p}$  a proton-proton ütközésben keletkező részecskék száma,  $N_{A+A}$  pedig az ion-ion ütközésben keletkező részecskék száma. Amikor ezt a faktort megmérték centrális arany-arany ütközések esetén, azt tapasztalták, hogy a nagy impulzusú részecskék száma csak  $\sim 20\text{-}40\%$ -a annak, mint amire a proton-proton ütközések alapján számítani lehetett. Nehézion ütközésekben  $60\text{-}80\%$ -kal kevesebb nagy impulzusú részecskét észleltek.

Ennek magyarázatára több feltételezés is született, melyek közül az egyik az anyag egy új állapotát jósolta, melyben a kvarkok és a gluonok egy olyan plazmát hoznak létre, mely lefékezi az erős kölcsönhatásban részt vevő részecskéket, így a nagy impulzusú részecskék száma jelentősen lecsökken.

A feltevések próbájaként elvégeztek olyan kísérleteket [4, 5], melyekben egy deuteronot és egy arany atommagot ütköztettek (2. ábra). A jelenség ebben az esetben nem ismétlődött meg. Ennek magyarázata az, hogy az új anyag ezekben a kísérletekben bár szintén létrejöhett, de olyan kis térfogatban, mely nem tudta lefékezni a részecskéket. Ezekből a mérési eredményekből arra lehetett következtetni, hogy az anyagnak valóban egy új formáját találták meg. Ezt az ezt követő mérések is alátámasztották.



2. ábra. A jet quenching jelenségének vizsgálata. Az első ábrán a deuteron ellenpróba, a második ábrán a centrális és a periferikus ion-ion ütközések láthatók. A szürke sáv a statisztikus hibát jelöli [3, 5]

További megfigyelések skálaviselkedést mutattak [4,6] (azaz, bizonyos mérhető mennyiségek a paramétereiktől nem egyesével, hanem azok egy bizonyos kombinációjától függnek). Ilyen viselkedést például a hidrodinamikában lehet megfigyelni. Ezért a folyadékkép egy alkalmas modell lehet az anyag viselkedésének leírására. Ezek az eredmények ösztönözték azon méréseket, melyekben a QGP viszkozitását mérték. Ezek alapján kiderült [7], hogy QGP egy rendkívül kis viszkozitású, szinte tökéletes folyadék. (A tökéletes folyadéknak elhanyagolhatóan kicsi a viszkozitása és a hővezetése.) Így le lehet írni, mint egy táguló folyadékot. A mérések azt mutatták, hogy a QGP viszkozitásának értéke az elméleti minimumhoz közeli <sup>1</sup>  $\eta/s \approx (1,1 - 1,5)\hbar/4\pi$ , ahol  $\hbar/4\pi$  a feltételezett elméleti minimum.

A foton spektrumból sikerült azt is megállapítani [8], hogy az elméleti számításoknak megfelelően magas kezdeti hőmérséklettel rendelkezik ez az anyag (hozzávetőleg 300-600 MeV). A rác-QCD számítások szerint körülbelül 170 MeV az a hőmérséklet, mely felett megjelenhetnek kvark szabadsági fokok [9]. A mért foton-spektrumból számolt magas kezdeti hőmérséklet tehát megerősíti azt, hogy egy kvarkokból és gluonokból álló anyag jön létre.

Ma már nem csak a RHIC-ben végeznek nehézion-fizikai kísérleteket, hanem az CERN LHC-ban is, ahol Pb+Pb ütközéseket mérnek, de nagyobb energiákon. Az eredmények azt mutatják, hogy az ALICE detektor által megfigyelt ütközésekben is létrejön a QGP – és viselkedését hidrodinamikai modellekkel szintén jól le lehet írni.

A dolgozatomban bemutatott hidrodinamikai modellt is az ALICE detektor által mért adatokra fogom alkalmazni [10–12].

---

<sup>1</sup>Az AdS/CFT dualitásból adódó sejtés a kinematikai viszkozitás alsó határára

## 3. Hidrodinamikai áttekintés

### 3.1. A klasszikus hidrodinamika

Ebben a részben áttekintem a klasszikus hidrodinamika alapjait – a három alapegyenletet – melyek a kontinuitási egyenlet, a mozgásegyenlet, azaz az Euler-egyenlet és az energiamegmaradást biztosító egyenlet.

Az alapegyenletek felírásánál végig feltételezzük, hogy a folyadék folytonos közeg. A *folyadékkelem*, vagy az *áramlás egy pontja* fogalmak alatt olyan elemi térfogatokat értünk, melyekben még mindig nagy számú részecske van. Vagyis a részecske átlagos térfogata elhanyagolható az elemi térfogathoz képest, mely azonban infinitezimálisnak tekinthető a vizsgálódások során.

### Alapegyenletek

#### A kontinuitási egyenlet

Elsőként az anyagmegmaradást leíró *kontinuitási egyenletet* írjuk fel. A kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

alakú, ahol a  $\rho$  a sűrűség,  $\mathbf{v}$  a folyadékkelem sebessége és  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ . Szokás bevezetni az áramsűrűség-vektort, melyet a

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (3)$$

egyenlet definiál. Ilyen kontinuitási egyenlet nem csak tömegsűrűsége, hanem bármilyen más lokálisan megmaradó mennyiségre felírható (pl. számsűrűség, töltéssűrűség).

#### Euler-egyenlet

Ha felírjuk egy folyadékkelem mozgásegyenletét<sup>2</sup>

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p \quad (4)$$

alakban és figyelembe vesszük, hogy az egyenletben a  $d\mathbf{v}/dt$  gyorsulás nem a vizsgált tér egy rögzített pontjában van értelmezve, hanem a folyadékkelemmel együttmozgó rendszerben, akkor a teljes derivált kifejtésével a laborrendszerre áttérve az Euler-egyenletet kapjuk. (Tulajdonképpen áttérünk az együttmozgó Lagrange-koordinátákról a laborrendszerbeli Euler-koordinátákra, ahogy az a Függelékben is olvasható.)

Tehát figyelembe kell venni az adott pontban a folyadékkelem sebességének változását és a megváltozáshoz szükséges idő alatt megtett út két végpontja közötti sebességkülönbséget. Ha

<sup>2</sup>Feltételezve, hogy végig a folyadék belsejében vagyunk és így a felületi jelenségektől eltekinthetünk.

mindezt figyelembe vesszük, akkor a következő alakot kapjuk:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (5)$$

Ez az Euler-egyenlet, melyet először *Leonhard Euler* állított fel 1755-ben.

### Energia-egyenlet

Az *energiamegmaradásra vonatkozó egyenlet* felírásához feltesszük, hogy a folyadékban nincs belső súrlódás és hőcsere, általában nincsenek disszipatív folyamatok, valamint lokális termodinamikai egyensúly áll fent (kis folyadékelem állapotváltozása egyensúlyi állapotokon keresztül történik). Ekkor az entrópia konstansnak tekinthető egy pályavonal mentén. Ezt fejezzük ki a  $ds/dt = 0$  összefüggéssel, ahol  $s$  az entrópia és a derivált az elmozdulástér egy pontjában van értelmezve. Ennek következményeképpen a Gibbs-Duhem relációból egy tömegegységre ( $dV = d(1/\rho)$ ) fennáll a (6) egyenlet.

$$d\epsilon = T ds - p \left( d\frac{1}{\rho} \right) = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (6)$$

mely egyenletből, ha osztunk  $dt$ -vel és figyelembe vesszük, hogy  $ds/dt = 0$ , a

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (7)$$

ahonnan a teljes deriváltat a fentiek alapján kifejtve, felhasználva a (2) kontinuitási egyenletet és a (5) Euler-egyenletet a

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}\epsilon) = -\frac{p}{\rho} \nabla \mathbf{v} \quad (8)$$

alakra jutunk.

Ha csak a felírt egyenleteink lennének, akkor kevesebb egyenletünk lenne, mint ahány ismeretlenünk. Ezért meg kell teremteni a kapcsolatot az  $\epsilon$  és a  $p$  között. Ezt tesszük meg az *állapotegyenlettel*, melyek alakja a következő:

$$\epsilon = \kappa p \quad (9)$$

ahol, ha a  $\kappa$  konstans, azaz  $\epsilon = \text{konstans} \cdot p$ , akkor arányos az anyagbeli hangsebesség négyzetével. Ez a legáltalánosabb esetben függhet a hőmérséklettől és a nyomástól is. Tudjuk, hogy az anyagban a zavar hullámként terjed, így tömegegységre vonatkoztatva a közegbeli hangsebesség

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \epsilon}} \rightarrow \frac{1}{c_s^2} = \frac{\epsilon}{p} = \kappa \quad (10)$$

Látható, hogy  $1/\kappa$  nem más mint a közegbeli hangsebesség négyzete.

### 3.2. A relativisztikus hidrodinamika

Ebben a részben a hidrodinamika relativisztikus megfogalmazását, az alapegyenletek származtatását mutatom be, a relativisztikus tárgyalásmódnak megfelelően négyes-formalizmusban. A levezetések során mindenhol a  $c = 1, k_B = 1$  egységrendszert használom.

#### Kontinuitási egyenlet

A relativisztikus kontinuitási egyenlet

$$\partial_\mu (n u^\mu) = 0, \quad (11)$$

alakú, ahol  $u^\mu$  a négyes-sebesség,  $n$  pedig a részecskeszám-sűrűség. Ha komponensenként kiírjuk, és vesszük a klasszikus határesetet (azaz  $v \ll 1$ ), megkapjuk a klasszikus kontinuitási egyenletet.

#### Euler-egyenlet, energia-egyenlet

Az energiamegmaradást és az Euler-egyenletet az energia-impulzus tenzor (EIT) divergenciájának eltűnése adja.

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (12)$$

Nyugvó folyadéokra

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (13)$$

alakban adható meg az EIT, azaz fennáll a

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}. \quad (14)$$

összefüggés. Ha behelyettesítjük ezt az alakot a (12) egyenletbe és felbontjuk a zárójeleket, a következőkre jutunk:

$$\partial_\nu ((\epsilon + p)u^\nu u^\mu - g^{\mu\nu}) = u^\nu u^\mu \partial_\nu \epsilon + \epsilon u^\mu \partial_\nu u^\nu + \epsilon u^\nu \partial_\nu u^\mu + \quad (15)$$

$$+ u^\nu u^\mu \partial_\nu p + u^\nu p \partial_\nu u^\mu + u^\mu p \partial_\nu u^\nu - \partial_\nu g^{\mu\nu} p =$$

$$= [(\epsilon + p)u^\nu \partial_\nu u^\mu + (u^\nu u^\mu - g^{\mu\nu})\partial_\nu p] + \quad (16)$$

$$+ [u^\mu ((\epsilon + p)\partial_\nu u^\nu + u^\nu \partial_\nu \epsilon)] = 0$$

Ha vesszük az egyenlet  $u_\mu$ -vel vett projekcióját, akkor az első zárójeles kifejezés egyenlő lesz nullával és megkapjuk a relativisztikus *energiamegmaradást biztosító egyenletet*:

$$(\epsilon + p)\partial_\nu u^\nu + u^\nu \partial_\nu \epsilon = 0, \quad (17)$$



szorozva  $u^\nu$ -vel és kivonva az eredeti egyenletből, az *Euler-egyenletet* kapjuk:

$$(\epsilon + p)u^\nu \partial_\nu u^\mu = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \partial_\nu p \quad (18)$$

Az *állapotegyenletet* itt is fel kell írni.

$$\epsilon = \kappa p \quad (19)$$

Ezeket az egyenleteket kell tehát megoldani, ahhoz, hogy egy lehetséges sebesség-nyomás-számsűrűség rendszert kapjunk.

## 4. 1+1 dimenziós megoldások

Ebben a fejezetben olyan relativisztikus hidrodinamikai modelleket mutatok be, melyek az alkalmazás szempontjából fontos szerepet töltenek be a nehézion-fizikai kutatásokban. A megoldások azért is fontosak, mert a relativisztikus hidrodinamika egyenletei bonyolultak, nem-lineárisak és ezért egzaktul nehezen megoldhatóak. Klasszikus hidrodinamikai megoldásokból lényegesen több ismert.

### 4.1. Landau–Khalatnikov-megoldás

Landau javasolta elsőként a folyadékmodell alkalmazását a relativisztikus ütközések leírására, mint például a légkörben lezajló proton-proton ütközések. Ő vezette le a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit és talált is azokra egy megoldást 1+1 dimenzióban [13], mely azonban implicit, így nehéz vele számolni. Mivel ez a megoldás csak longitudinális irányban értelmezett nem számolhatók belőle az általunk vizsgált mennyiségek.

Landauék a már említett

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0 \quad (20)$$

összefüggést áttranszformálták a

$$u_\mu \frac{\partial(Tu_\nu)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial T}{\partial x_\nu} = 0 \quad (21)$$

kifejezésbe. Mivel a vizsgált tartományban az ütköző részeket lapított korongnak lehet tekinteni, ezért elegendő csupán két koordinátával foglalkozni (melyek a  $t$  és a  $z$  koordináták):

$$\frac{\partial(Tu_1)}{\partial x_4} + \frac{\partial Tu_4}{\partial x_1} = 0. \quad (22)$$

Vezessük be a relativisztikus hidrodinamika egydimenziós mozgásának potenciáljaként a  $\phi$  függvényt:

$$Tu_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \quad Tu_4 = \frac{\partial\phi}{\partial x_4} \quad (23)$$

ahol  $\phi$  kielégíti

$$d\phi = Tu_4 dx_4 + Tu_1 dx_1 \quad (24)$$

relációt. Ha bevezetjük  $t$ -t  $x_4$  helyett,  $u_0 = 1/\sqrt{1-v^2}$ -et az  $u_4$  helyett és az  $x$ -et az  $x_1$  helyett, akkor a

$$d\phi = -Tu_0 dt + Tu_1 dx \quad (25)$$

kifejezést kapjuk. Definiáljuk a sebességet a  $u_0$  és  $u_1$

$$u_1 = \sinh \alpha, \quad u_0 = \cosh \alpha \quad (26)$$

választással. Elvégezve egy Legendre-transzformációt  $T$ -ben,  $\alpha$ -ban, a következő potenciál adódik:

$$d\chi = d(\phi + Tu_0t - Tu_1x). \quad (27)$$

Ezen egyenletből a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + (c_0^2 - 1) \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \quad (28)$$

ahol  $y = \ln T/T_0$ . További egyszerűsítés a  $3p = \epsilon$  és  $c_0^2 = 1/3$  kikötés, vagyis itt a  $\kappa = 3$ , azaz konstans:

$$3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0. \quad (29)$$

Új változókat bevezetve és matematikai átalakításokat elvégezve adódott egy megoldás, mely, bevezetve

$$\ln \frac{t+x}{\Delta} = \tau, \quad \ln \frac{t-x}{\Delta} = \eta \quad (30)$$

kifejezéseket (ahol  $\Delta$  a Lorentz-kontrakciót szenvedett magok vastagsága) és figyelembe véve a Stefan–Boltzman-határesetet ( $\epsilon \sim T^4$ ):

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp \left[ -\frac{4}{3} (\eta + \tau - \sqrt{\eta\tau}) \right]. \quad (31)$$

alakban áll elő.

## 4.2. Hwa–Bjorken-megoldás

Hwa [14] volt az, aki ezt a megoldást megtalálta. Ez csak 1+1 dimenziós és gyorsulásmentes, de explicit. Ez könnyíti az alkalmazást a LK megoldással szemben.

Hwa definiált egy  $f(k)$  impulzuseloszlás függvényt, mely azt mondja meg, hogy a megfigyelhető részecskék milyen valószínűséggel találhatók  $k_\mu$  impulzussal még a kifagyás előtt egy adott helyen. A jelenséget  $b = 0$  impakt paraméterrel írta le tömegközépponti rendszerben. Azt feltételezte, hogy a részecskék kezdősebessége az ütközés középpontjánál a legnagyobb és kifelé egyre csökken. Így a középponttól távolodó részecskéket olyan szeletekre osztotta, melyekben az átlagos helyzetet  $x_\mu$ -vel jelölte. Definiálta az  $F(x, k)$  számsűrűség függvényt azon részecskékre, melyek ezzel az  $x_\mu$ -vel jellemezhető szeletben  $k$  és  $k + dk$  között találhatók.

Az volt a feltevés, hogy létezik ilyen  $F(x, k)$  függvény és ez megteremti a kapcsolatot a folyadék makroszkópikus tulajdonságai  $x_\mu$  és a részecskék mikroszkópikus tulajdonságai  $k_\mu$  között. Definiálta a fluxust:

$$S_\mu = \int k_\mu F(x, k) \frac{d^3 k}{k_0} \quad \text{az EIT pedig} \quad (32)$$

$$T_{\mu\nu}(x) = \int k_\mu k_\nu F(x, k) \frac{d^3 k}{k_0}. \quad (33)$$

alakban áll elő. Amíg a részecskék száma megmarad, addig az EIT-nak is „meg kell maradnia”, vagyis kapunk egy kontinuitási egyenletet:

$$\partial_\mu S^\mu = 0 \quad (34)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (35)$$

A modell megadja a részecskeszám rapiditáseloszlását a sebesség függvényében :

$$\frac{dN}{dy} = \left[ \gamma \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_t \right]^{-1}, \quad (36)$$

ahol  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ . Lehet, hogy a tömegelem útja a Minkowski tér-időben nem egyenes. Definiáljuk ( $x^\mu = (t, z)$  a cella közepét adja) :

$$v = \frac{dz}{dt}, \quad u = \frac{z}{t}. \quad (37)$$

Az  $u = v$  egyenlőség nem feltétlenül kell hogy igaz legyen, de ebben a speciális esetben feltesszük, hogy az. Így adta meg Hwa a sebesség mezőt. Jelen megoldásban a (36) képlet a következő alakot ölti:

$$\frac{dN}{dy} = \tau_0, \quad (38)$$

ahol  $\tau_0$  a keletkezéstől a kifagyásig eltelt sajátidő.

Bjorken [15] a korábban meglévő Hwa-féle megoldást más alakra hozta, melyből jó közelítés adható a kezdeti energiasűrűségre a mért energiasűrűségből. A megoldáshoz Bjorken definiálta a következő függvényeket:

$$\epsilon = \epsilon(\tau, \eta) \quad (39)$$

$$p = p(\tau, \eta) \quad (40)$$

$$T = T(\tau, \eta) \quad (41)$$

$$u_\mu = u_\mu(\tau, \eta) \quad (42)$$

ahol  $\eta$  a rapiditás,  $\tau$  a sajátidő. Ez a modell is a Hwa által bevezetett sebességmezőt használja:  $x_\mu/\tau = u_\mu$ . Termodinamikai megfontolásokkal, a következő összefüggést kapta Bjorken az állapotegyenletre:

$$\frac{\epsilon}{3p} = 1 - \frac{\beta}{3n} \frac{\partial n}{\partial \beta} \quad (43)$$

ahol  $\beta = T^{-1}$ . Ha az EIT nyoma nem negatív ( $T^\mu_\mu \geq 0$ ), a tágulásból következően,  $\epsilon \geq 3p$ .  
Vagyis:

$$\frac{\partial n}{\partial \beta} \leq 0. \quad (44)$$

A kezdeti energiasűrűséget pedig az alábbiakból lehet megállapítani egységnyi rapiditás intervallumra, a nulla rapiditás körül:

$$\epsilon = \frac{\langle m_t \rangle}{(R^2 \pi \tau_0)} \frac{dn}{d\eta}, \quad (45)$$

ahol a  $dn/d\eta$  a részecskeszám,  $R^2 \pi$  a létrejövő anyag keresztmetszetének felülete, melyet kísérleti adatokból (pl. HBT mérésből) meg lehet becsülni,  $\langle m_t \rangle$  pedig az átlagos transzverz energiát jelenti, ha  $p_z = 0$ . A rendszer longitudinális mérete a kezdeti sajátidővel  $\tau_0$  közelíthető, így a nevezőben a  $d\eta \cdot$  térfogat áll.

Elegendő a Bjorken esetben a végállapotot ismerni, mivel a gyorsulás hiánya miatt a rapiditás Lorentz-invariáns.

### 4.3. Bialas–Janik–Peschanski-megoldás

Ez a megoldás [16] azért rendkívül érdekes, mert összeköti az előzőekben említett két, vagyis a LK- és a HB-megoldást. Lényegében interpolál a boost-invariáns Bjorken kép és a nem-boost-invariáns Landau kép között. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy ez a megoldás is 1+1 dimenziós.

A hidrodinamika egyenleteit fénykúp változóiban írja fel.

$$u^\pm = e^{\pm y} \quad z_\pm = t \pm z \quad (46)$$

ahol,  $u^\pm$  a négyes sebesség fénykúp-komponensei,  $z_\pm$  pedig a fénykúp kinematikai változói.

Ezen koordinátákban az energia-impulzus tenzor eltűnése a következőképpen néz ki (nem szabad elfelejteni, hogy 1+1 dimenziós a megoldás, vagyis az energia-impulzus tenzor 2×2-es):

$$\partial_\pm T^{01} \frac{1}{2} \partial_\pm (T^{11} \pm T^{00}) - \frac{1}{2} \partial_\mp (T^{11} \mp T^{00}) = 0 \quad (47)$$

melyből, használva az energia-impulzus tenzor (14)-beli definícióját és a (19)-os állapotegyenletet, két összefüggést kaptak:

$$g \partial_+ [\ln p] = -\frac{(1+g)^2}{2} \partial_+ y - \frac{g^2-1}{2} e^{-2y} \partial_- y \quad (48)$$

$$g \partial_- [\ln p] = \frac{(1+g)^2}{2} \partial_- y - \frac{g^2-1}{2} e^{2y} \partial_+ y \quad (49)$$

Ezeket egy egyenletbe összefoglalva

$$\partial_+ \partial_- y = \frac{g^2-1}{4(1+g)^2} (\partial_- \partial_- (e^{-2y}) - \partial_+ \partial_+ (e^{2y})) \quad (50)$$

Ezen egyenletekbe behelyettesítve az ún. *Bjorken-ansatz*-ot, mely

$$y = \eta \quad (51)$$

ahol  $y$  a rapiditás,  $\eta$  pedig a "tér-idő" rapiditás:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E+p}{E-p} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t+z}{t-z} \right). \quad (52)$$

Egy boost-invariáns alak adódik a nyomásra mely csak a sajátidőtől függ:

$$p = p_0 \tau^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \quad (53)$$

Az (51) egyenletet fénykúp koordinátákban felírva

$$2y = \ln u^+ - \ln u^- = \ln f_+(z_+) - \ln f_-(z_-) \quad (54)$$

és beírva a (50) egyenletbe a

$$f_- \partial_- \partial_- (f_-) = f_+ \partial_+ \partial_+ (f_+) = \frac{A^2}{2} \quad (55)$$

összefüggés adódik, ahol  $A$  egy konstans. Így ezeket egy egyenletbe összefoglalva

$$f f'' = \frac{A^2}{2} \quad (56)$$

alakra jutunk. Ez az egyenlet megoldható, ha  $f'$ -vel szorzunk és  $f$ -fel osztunk:

$$[(f')^2]' = A^2 [\ln f]' \rightarrow f' = A \sqrt{\ln(f/H)} \quad (57)$$

ahol  $H$  egy tetszőleges konstans. Ez az egyenlet megoldható:

$$z_- - z_0 = h \int_{F_0}^F \frac{dF'}{\sqrt{\ln(F')}} \quad (58)$$

ahol a  $F = f/H$  és  $h = H/A$  jelölések kerültek bevezetésre. Ebben az egyenletben a  $z$ -nek és  $h$ -nak jut rendkívül fontos szerep, ugyanis, ha  $h \rightarrow 0$  és  $z_{\pm}$  fix, a megoldás boost-invariáns lesz, míg ha  $z_{\pm} \rightarrow \infty$  és  $h$  fix, akkor visszkapjuk a nem-boost-invariáns Landau megoldást.

#### 4.4. Nagy–Csörgő–Csanád-megoldás

Ez a megoldás [17] gyorsuló, egzakt és explicit előáll. Nagy előnye a LK megoldással szemben az, hogy explicit felírható és 3+1 dimenziós. A HB megoldással szembeni előnye az, hogy gyorsuló. Ráadásul speciális esetként tartalmazza a HB megoldást és számítható belőle a kezdeti energiasűrűség. Továbbá használható az ultrarelativisztikus nehézion ütközésekben lejátszódó folyamatok élettartamának becslésére és meghatározható belőle a rapiditáseloszlás ( $dn/dy$ )

értéke is. A megoldás a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit átírja Rindler-koordinátás alakba:

$$\eta = \operatorname{artanh} \frac{r}{t}, \quad \tau = \sqrt{t^2 - r^2}, \quad \text{azaz} \quad (59)$$

$$r = \tau \sinh \eta, \quad t = \tau \cosh \eta. \quad (60)$$

Amikor  $v = \tanh \Omega(\eta)$ , ahol  $\Omega$  a folyadékkelem rapiditása a tágulás során, a (17), (18) egyenletek a következő alakot öltik:

$$(\kappa + 1) \frac{d\Omega}{d\eta} = -\frac{\tau}{p} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \coth(\Omega - \eta) \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad (61)$$

$$\frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{d\Omega}{d\eta} = -\frac{\tau}{p} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \tanh(\Omega - \eta) \frac{1}{p} - \frac{\kappa + 1}{\kappa} \frac{d-1}{\sinh \eta} \frac{\sinh \Omega}{\cosh(\Omega - \eta)}. \quad (62)$$

Ezen egyenleteket a következő alakú sebesség- és nyomásmező megoldja:

$$v = \tanh(\lambda \eta) \quad (63)$$

azaz, ebben az esetben  $\Omega(\eta) = \lambda \eta$ .

$$p = p_0 \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{\lambda d \frac{\kappa+1}{\kappa}} \quad (64)$$

Ha speciálisan  $\lambda = 1, d, \kappa \in \mathbb{R}$ , a HB megoldás adódik. Ha  $\lambda = 2, d \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa = d$ , egy gyorsuló  $d$  dimenziós megoldást kapunk. Ha  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa, d = 1$ , akkor egy speciális állapotegyenletet kapunk, de általános sebességmezőt.

## 5. Egy 3+1 dimenziós megoldás

### 5.1. Csörgő–Csernai–Hama–Kodama-megoldás

Ez a megoldás [18] ellipszoidális szimmetriát feltételez. Ez az egyszerű feltevés, a táguló anyag geometriájára vonatkozik. Az ütközések leírására érdemes azt a megszorítást tenni, hogy a termodinamikai mennyiségek egy felületen legyenek állandóak. A korábbi relativisztikus esetekben ezek a felületek vagy szférikus szimmetriával rendelkeztek, vagy mivel 1+1 dimenziósak voltak, semmilyen. Jelen megoldás az  $s$  skálaváltozó jó megválasztásával egy táguló ellipszoidot ír le.

$$s = \frac{x^2}{X(t)^2} + \frac{y^2}{Y(t)^2} + \frac{z^2}{Z(t)^2} \quad (65)$$

ahol  $X(t)^2, Y(t)^2, Z(t)^2$  csak az időtől függő skálaparaméterek,  $x, y, z$  pedig a koordináták. Mivel táguló megoldást vizsgálunk, szükséges egy, a tágulást jellemző sebességmező választása is. Az asztrofizikából kölcsönözhetünk egy ilyet, nevezetesen a Hubble-sebességmezőt, mely gömbszimmetrikus. Ez egy roppant egyszerű, de hatékony felírása a robbanás jellegű folyamatoknak. A sebesség arányos a távolsággal, Hubble felírásában  $v = H \cdot r$ , ahol  $H$  a Hubble-konstans. A vizsgált megoldásban kicsit másképp írjuk fel, de a jelentése ugyanaz lesz az általunk használt formulának is:

$$u^\mu = \gamma \left( 1, \frac{\dot{X}}{X}x, \frac{\dot{Y}}{Y}y, \frac{\dot{Z}}{Z}z \right), \quad (66)$$

ahol  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ ,  $X = \dot{X} \cdot t, Y = \dot{Y} \cdot t, Z = \dot{Z} \cdot t$  és  $u^\mu = x^\mu/\tau$ , ahol  $x^\mu$  a téridő négyesvektor,  $\tau$  pedig a sajátidő. A megoldást adó termodinamikai mennyiségek

$$n = n_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^3 \nu(s) \quad (67)$$

$$T = T_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\frac{3}{\kappa}} \frac{1}{\nu(s)} \quad (68)$$

$$p = p_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{3+\frac{3}{\kappa}} \quad (69)$$

alakúak, ahol  $n$  a számsűrűség,  $T$  a hőmérséklet,  $p$  a nyomás és  $p_0 = n_0 T_0$ . A fenti sebességmező és termodinamikai mennyiségek  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z} = \text{áll.}$  feltétel mellett megoldják a relativisztikus hidrodinamika egyenleteit. Ha a  $\nu(s)$  skálafüggvény egy ellipszoidot ír le:

$$\nu(s) = e^{-bs/2}. \quad (70)$$

### 5.2. Mérhető mennyiségek

#### A forrásfüggvény

Ebben részben bemutatom, hogy a fenti eredményekből, hogyan lehet kiszámolni megfigyelhető mennyiségeket. Ezeket a számolásokat a [19] cikk részleteiben tartalmazza. Ahhoz, hogy



a megfigyelhető mennyiségeket ki tudjuk számolni ebből a modelltől, tudnunk kell a forrásfüggvény  $S(x, p)$  alakját, mely meghatározza, hogy milyen valószínűséggel keletkezett az adott részecske adott helyen, adott impulzussal. Pillanatszerű kifagyást feltételezünk:  $H(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$  ahol  $H(\tau)$  a hadronizációt jellemző függvény, ami csak a sajátidőtől függ.

Az ilyen forrásfüggvényeket a relativisztikus formalizmusnak megfelelően a Maxwell–Jüttner-eloszlásból kell számolni:

$$S(x, p)d^4x = \mathcal{N}n e^{-\frac{p_\mu u^\mu}{T(x)}} H(\tau) d\tau p_\mu d^3\Sigma_\mu(x), \quad (71)$$

ahol  $d^3\Sigma_\mu(x)$  a kifagyási hiperfelületek vektormértéke, melyek Lorentz-merőlegesek erre,  $p^\mu d^3\Sigma_\mu(x)$  a Cooper–Frye-faktor. Mivel ebben a megoldásban a kifagyás konstans  $\tau$  mellett történik, ezért feltehetjük, hogy  $d^3\Sigma_\mu(x) = \frac{u_\mu d^3x}{u^0}$ , és  $d\tau = \frac{t}{\tau}$ , és a forrásfüggvényt a következő alakban írhatjuk:

$$S(x, p)d^4x = \mathcal{N}n e^{-\frac{p_\mu u^\mu(x)}{T(x)}} H(\tau) \frac{p_\mu u^\mu}{u^0} d^4x. \quad (72)$$

Ezen forrásfüggvény integrálásával adódnak a mérhető mennyiségek.

## A transzverz impulzus

A detektorokkal észlelt hadronoknak csak az impulzusát tudjuk detektálni a keletkezés helyét nem. A fenti forrásfüggvényben tehát ki kell integrálni a koordinátákra, hogy az impulzuseloszlásra olyan összefüggést kapjunk, melyet már össze lehet vetni az adatokkal. Mivel a  $p_z \ll E$ , ezért a pontos mérési eredményekért a transzverz ( $z$ -re merőleges) síkbeli,  $\phi$ -től független, ún. *transzverz impulzust*, ( $p_t$ ) mérik. Tehát a forrásfüggvényből a  $N_1(p_t)$  transzverz impulzuseloszlást kell kiszámolni. Ehhez ki kell számolni az egyrészecske impulzuseloszlást:

$$N_1(p) = \int_{\mathbb{R}^4} S(x, p). \quad (73)$$

Ha a (72) forrásfüggvényt tekintjük, nyeregponthoz közelítést alkalmazva kiszámítható az integrál. Bevezetve a

$$T_x = T_0 + \frac{ET_0 \dot{X}_0^2}{b(T_0 - E)} \quad (74)$$

$$T_y = T_0 + \frac{ET_0 \dot{Y}_0^2}{b(T_0 - E)} \quad (75)$$

$$T_z = T_0 + \frac{ET_0 \dot{Z}_0^2}{b(T_0 - E)} \quad (76)$$

effektív hőmérsékleteket,

$$R_x^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_x - T_0)}{ET_x}, \quad R_y^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_y - T_0)}{ET_y}, \quad R_z^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_z - T_0)}{ET_z} \quad (77)$$

mennyiségek pedig a forrás látszólagos méretét adják. Ezek felhasználásával a következő adódik:

$$N_1(p) = \int_{\mathbb{R}^4} S(x, p) d^4x = \bar{N} \cdot \bar{E} \cdot \bar{V} \cdot e^{\frac{p^2}{2ET_0} - \frac{p_x^2}{2ET_0} - \frac{p_y^2}{2ET_0} - \frac{p_z^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}}, \quad (78)$$

ahol

$$\bar{N} = \mathcal{N} n_0 (2\pi)^{\frac{3}{2}} \quad (79)$$

$$\bar{E} = \left( E - \frac{p_x^2 \left(1 - \frac{T_0}{T_x}\right)}{E} - \frac{p_y^2 \left(1 - \frac{T_0}{T_y}\right)}{E} - \frac{p_z^2 \left(1 - \frac{T_0}{T_z}\right)}{E} \right) \quad (80)$$

$$\bar{V} = R_x \cdot R_y \cdot R_z. \quad (81)$$

Bevezethető a transzverz impulzus,  $p_t$  a

$$p_t = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (82)$$

alakban, ahol  $p_x = p_t \cos \phi$  és  $p_y = p_t \sin \phi$ . A  $p_z = 0$  feltétel miatt az energiát az ún. transzverz tömeggel helyettesítjük:  $m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}$ . Ezeket a (78) egyenletbe helyettesítve néhány átalakítást elvégezve, bevezetve a

$$w = \frac{p_t^2}{4E} \left( \frac{1}{T_y} - \frac{1}{T_x} \right) \quad (83)$$

$$\frac{1}{T_{\text{eff}}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_x} + \frac{1}{T_y} \right) \quad (84)$$

összefüggéseket és szétbontva az exponenciális függvényt szögtől függő és nem függő részekre, a következőt kapjuk:

$$N_1(p_t, \phi) = \overline{NEV} e^{w \cos 2\phi} e^{-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}}. \quad (85)$$

$\bar{E}$  alakja

$$\bar{E} = \left( E - \frac{p_t^2}{E} + \frac{p_t^2 T_0 \cos^2 \phi}{ET_x} + \frac{p_t^2 T_0 \sin^2 \phi}{ET_y} \right) \quad (86)$$

Trigonometrikus azonosságok felhasználásával ez

$$\bar{E} = \left( E - \frac{p_t^2}{E} + \frac{p_t^2 T_0}{ET_{\text{eff}}} - 2T_0 w \cos \phi \right) \quad (87)$$

alakra hozható, vagyis a következő összefüggést kapjuk:

$$N_1(p_t, \phi) = \bar{N} \left( E - \frac{p_t^2}{E} + \frac{p_t^2 T_0}{ET_{\text{eff}}} - 2T_0 w \cos \phi \right) \bar{V} e^{w \cos 2\phi} e^{-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}}. \quad (88)$$

Felismerve  $\bar{E}$  átalakításában a módosított Bessel-függvényekre vonatkozó

$$I(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{w \cos 2\phi} \cos(2n\phi) d\phi \quad (89)$$

azonosságot a  $\phi$  szerinti integrálás elvégezhető. Így a következő alakra jutunk:

$$N_1(p_t) = \overline{NV} e^{-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}} \left( \left( E - \frac{p_t^2(T_{\text{eff}} - T_0)}{ET_{\text{eff}}} \right) I_0(w) - 2T_0 I_1(w) \right). \quad (90)$$

Mivel a  $w$  az adatok paramétertartományban kicsi, ezért  $I_0(w) \approx 1$ ,  $I_1(w) \approx 0$ . Így a transzverz impulzus-eloszlásra egy közelítő alakot kapunk:

$$N_1(p_t) = \overline{NV} \left( E - \frac{p_t^2(T_{\text{eff}} - T_0)}{ET_{\text{eff}}} \right) e^{-\frac{p_t^2}{2ET_{\text{eff}}} + \frac{p_t^2}{2ET_0} - \frac{E}{T_0}}. \quad (91)$$

### Az elliptikus folyás

Természetesen minket a szögfüggő eloszlások is érdekelhetnek. Ha Fourier-sorba fejtjük a (85)-et:

$$N_1(p) = N_1(p_t) \left[ 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\phi) \right] \quad (92)$$

A Fourier-komponensek közül a második az, amely az impulzuseloszlás transzverz síkbeli aszimmetriáját méri. A többi komponens szimmetria okokból elhanyagolható. Ugyanis ha nem teljesen centrális az ütközés, akkor a folyadék térbeli aszimmetriával fog rendelkezni, s mivel a keletkező anyag részei kölcsönhatnak egymással (kollektív dinamika), ez impulzustérbeli aszimmetriát okoz. Ha a részek nem hatnának kölcsön, mint például a gázokban, akkor az impulzustérbeli aszimmetria nem alakulna ki. Így azonban az elliptikus folyást a

$$v_2 = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi N_1(p_t, \phi) \cos(2\phi)}{\int_0^{2\pi} d\phi N_1(p_t, \phi)} \quad (93)$$

képlet definiálja. Ezen integráloknál is felhasználhatók a Bessel-függvények és tulajdonságaik:

$$v_2(p_t) = \frac{\left( E - \frac{p_t^2(T_{\text{eff}} - T_0)}{T_{\text{eff}}E} \right) I_1(w) - T_0(I_0(w) - I_2(w))}{\left( E - \frac{p_t^2(T_{\text{eff}} - T_0)}{T_{\text{eff}}E} \right) I_0(w) - 2T_0 I_1(w)}, \quad (94)$$

amiből, ha felhasználjuk, hogy kis  $w$ -re  $I_1(w) \approx 2wI_0(w)$  és  $I_2(w) \approx 0$ , akkor a

$$v_2(p_t) = \frac{I_1(w)}{I_0(w)} \left( 1 + \frac{2T_0}{E - \frac{p_t^2(T_{\text{eff}} - T_0)}{ET_{\text{eff}}}} \right) \quad (95)$$

alakra jutunk.

### Kétrészecske korreláció (HBT)

Ezt a módszert eredetileg kvazárok szögátmérőjének meghatározására használták, mely azonban a nehézion-fizika területén is sikeresnek bizonyult. A lényege az, hogy a kétrészecske impulzuseloszlást nem figyelhetjük meg úgy, mint két külön részecske impulzuseloszlásának szorzatát, mert a hullámfüggvényt szimmetrizálni kell. Bozonikus részecskék esetén ez adja a Bose–Einstein-korrelációt (fermionok esetén Fermi–Dirac típusú korreláció figyelhető meg). Ez a módszer értékes információkat szolgáltat a forrás geometriájáról; tulajdonképpen ez az egyetlen út, mellyel képet alkothatunk a forrásról. A kétrészecske korrelációs együtthatót a következő képlet definiálja:

$$C_2(p_1, p_2) = \frac{N_2(p_1, p_2)}{N_1(p_1)N_1(p_2)}, \quad (96)$$

ahol  $N_2(p_1, p_2)$  a kétrészecske impulzuseloszlás függvénye, mely tartalmazza a kvantummechanikából következő interferencia-tagot. a szimmetrizáció miatt a korrelációs függvény közötti kapcsolat  $p_1 \approx p_2$  feltétellel, bevezetve a  $K = (p_1 + p_2)/2$  átlagos impulzus és a  $q = p_1 - p_2$  jelöléseket, feltéve, hogy  $q \ll K$

$$C_2(q, K) = 1 + \left| \frac{\tilde{S}(q, K)}{\tilde{S}(0, K)} \right|^2 \quad (97)$$

ahol

$$\tilde{S}(q, K) = \int S(x, K) e^{iqx} dx^4 \quad (98)$$

Fourier-transzformáció s, mivel bármely függvény Fourier-transzformáltja a nullában nem más, mint a függvény integrálja, ezért a nevezőben is egy Fourier-transzformált áll.

Felhasználva a (78)-t, néhány integrálást elvégezve a következőre jutunk:

$$C_2(q, K) = 1 + e^{-(R_x^2 q_x^2 + R_y^2 q_y^2 + R_z^2 q_z^2)}. \quad (99)$$

Itt  $R_x, R_y, R_z$  a korrelációs sugarak, melyek függ(het)nek  $K$ -tól. Ha nem pillanatszerű kifagyást feltételeztünk volna, akkor az exponensben még kaptunk volna egy  $R_0^2 q_0^2$  tagot. Ennek a későbbiekben lesz jelentősége, mint a pillanatszerű kifagyás bizonyítéka. A korrelációs sugarak a forrás látszólagos méretét adják:

$$R_x^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_x - T_0)}{E_K T_x}, \quad R_y^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_y - T_0)}{E_K T_y}, \quad R_z^2 = \frac{T_0 \tau_0^2 (T_z - T_0)}{E_K T_z} \quad (100)$$

ahol  $E_K$  az átlagos  $K$  impulzushoz tartozó kinetikus energia (N.B.  $p_z = 0$ ),  $T_x, T_y, T_z$  pedig az átlagos impulzusnál vett effektív hőmérsékletek. A szokásos Bertsch – Pratt-féle koordinátarendszer használatos, az elnevezések is ezt tükrözik (*out* – a részecskepár átlagos transzverz impulzusának iránya, *long* – z tengely iránya, *side* – előző kettőre merőleges, szintén a transzverz síkban).

A koordináta transzformációból

$$R_{out}^2 = R_{side}^2 = \frac{R_x^2 + R_y^2}{2} \quad (101)$$

$$R_{long}^2 = R_z^2 \quad (102)$$

alakok adódnak. Az illesztésnél ezeket használjuk. Az illesztésnél bevezethetők a következő aszimmetriára jellemző mennyiségek:

$$\epsilon = \frac{\dot{X}_0^2 - \dot{Y}_0^2}{\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2} \quad \text{és} \quad (103)$$

$$\frac{1}{u_t^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\dot{X}_0^2} + \frac{1}{\dot{Y}_0^2} \right). \quad (104)$$

Az elliptikus folyásnál az  $\epsilon$  az impulzustérbeli aszimmetriát jelöli, míg az impulzus-eloszlásnál az átlagos transzverz sebesség  $u_t^2$ .

### 5.3. Mérhető mennyiségek konstans hőmérséklet profil esetén

Ha a skálafüggvényt egynek választjuk, azaz

$$\nu(s) = e^{-bs/2} = 1 \rightarrow b = 0 \quad (105)$$

akkor az azimutális aszimmetria vizsgálatának lehetőségét elveszítjük. Például a  $v_2$  elliptikus folyást kiszámolva nullát kapunk. Ennek ellenére azért tartottam érdemesnek ezt az esetet végigszámolni, mert a későbbi fejezetekben bemutatásra kerülő lehetséges általánosítások mind konstans hőmérsékletprofilra vonatkoznak. A dolgozatban ez is egy saját eredményem. Az LHC adatok esetén a spektrumot és a HBT-sugarakat is le tudja írni, az illesztés elvégezhető.

Ha a  $\nu(s) = 1$  akkor fel sem merül, hogy  $b$ -nek értéke lenne, így egy egyszerűbb forrásfüggvényt kell kiintegrálni, hisz minden irányfüggő tag eltűnik:

$$S(x, p)d^4x = \mathcal{N}n_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^3 \exp\left[\frac{-(Et - p_x r_x - p_y r_y - p_z r_z)}{\tau_0 T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{3/\kappa}}\right] \times \quad (106)$$

$$\times \frac{(Et - p_x r_x - p_y r_y - p_z r_z)}{t} \delta(\tau - \tau_0) d\tau d^3x$$

A  $t = \sqrt{\tau^2 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$ , beírva a forrásfüggvény (107) kifejezésébe, elvégezve a Dirac-deltára való integrálást lehet élni az előző fejezetben is használt másodrendű közelítéssel, vagyis a következőre jutunk:

$$N_1(p) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{N}n_0 \exp\left[\frac{-E}{T_0} + \frac{p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z}{\tau_0 T_0}\right] \left(E - \frac{p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z}{\tau_0}\right) d^3r \quad (107)$$

Ebből az integrálból ki lehet emelni tagokat, illetve fel lehet bontani a zárójelet, a szemléletesség kedvéért:

$$N_1(p) = \mathcal{N}n_0 \exp\left[\frac{-E}{T_0}\right] \times \quad (108)$$

$$\times \left( \int_{\mathbb{R}^3} E \cdot \exp\left[\frac{p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z}{\tau_0 T_0}\right] - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z}{\tau_0} \exp\left[\frac{p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z}{\tau_0 T_0}\right] \right) d^3r$$

Az maximális emisszió helye és az emisszió függvény szélessége közelíthető

$$\mathbf{r}_s = \frac{p\tau_0}{E} \quad (109)$$

$$R^2 = \frac{T_0 \tau_0^2}{E} \quad (110)$$

változókkal. Ezekkel a változókkal a következő kifejezést kapjuk:

$$N_1(p) = \mathcal{N}n_0 e^{-E/T_0} E \int \exp\left[-\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_s}{2R^2}\right] \exp\left[\frac{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 E}{2T_0 \tau_0^2}\right] \exp\left[\frac{p^2}{2T_0 E}\right] \quad (111)$$

A Gauss-integrálokra vonatkozó összefüggések alapján ez az integrál elvégezhető:

$$N_1(p) = \mathcal{N}n_0 E \left(\frac{2T_0 \tau_0^2 \pi}{E}\right)^{3/2} \exp\left[\frac{-E}{T_0} + \frac{p^2}{2ET_0}\right] \quad (112)$$

Látható, hogy a  $b \neq 0$  esethez hasonló eredmény adódott. A különbség az exponensben az, hogy az irányspecifikus indexű tagok hiányoznak, amint az várható is volt. Az előző esetben  $\bar{E}$ -ra egy összetett kifejezés adódott, jelen esetben azonban egyszerűen  $\bar{E} = E$ . A  $\bar{V}$  kifejezése jelen esetben  $R^3$ , míg az  $\bar{N} = \mathcal{N}n_0 (2\pi)^{3/2}$  maradéktalanul megjelent.

Ahhoz, hogy a transzverz impulzuseloszlást kapjuk meg, az előző fejezethez hasonlóan elvégezzük az áttérést. Mivel azonban nincs irányfüggés, a következő egyszerű alakot kapjuk:

$$N_1(p_t) = \bar{N}ER^3 \exp \left[ \frac{-E}{T_0} + \frac{p_t^2}{2ET_0} \right] \quad (113)$$

Ha elvégezzük a Fourier-transzformációt, mint az előző esetben, akkor megkapjuk, hogy a HBT sugarak megegyeznek.

$$R_{side}^2 = R_{out}^2 = R_{long}^2 = R^2 \quad (114)$$

Azt is érdemes megemlíteni, hogy ha egyszerűen vesszük a  $b \neq 0$ -nak megfelelő kifejezéseket és elvégezzük egy  $b \rightarrow 0$  határátmenetet, akkor ugyanerre az eredményre jutottunk volna.

Vagyis a (113)-beli eloszlás olyan konstans, azaz csak időtől függő hőmérséklet profillal rendelkező eloszlás, mely illeszthető az adatokra.

## 6. Illesztés az LHC adatokra

Saját eredményem az illesztések elvégzése mind a két esetben. Az adatok illesztéséhez egy C++ programot írtam a Minuit illesztőcsomag felhasználásával, melynek részletei a Függelékben található.

### 6.1. Az eredmények

Az illesztett paramétereket és értékeiket a 1. táblázat foglalja össze, valamint a 3. ábra mutatja. A mennyiségeket együtt illesztettem. Ez például a [19] cikkben nem volt lehetséges.

Paraméter	Értéke	Hibája
$T_0[\text{MeV}]$	246	$\pm 2$
$\epsilon$	0.09	$\pm 0.001$
$\frac{u_t^2}{b}$	-3.3	$\pm 0.2$
$\tau_0[\text{fm}/c]$	8.06	$\pm 0.09$

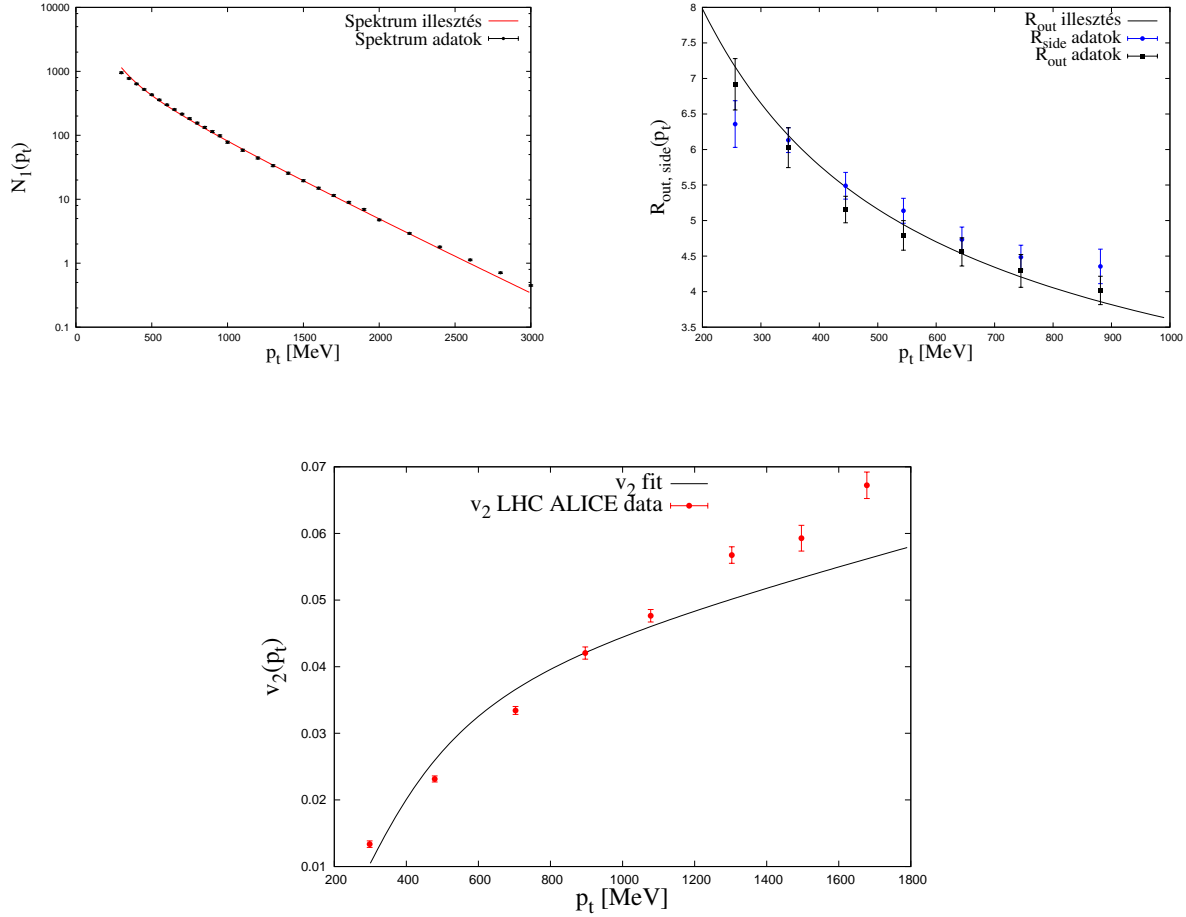
1. táblázat. A spektrum, a HBT sugarak és a  $v_2$  illesztése az LHC ALICE detektor adataira [10–12]. Látható, hogy a hőmérséklet jóval magasabb mint a kifagyási hőmérséklet, vagy mint a [19] cikkben kapott 200 MeV. Azonban ez csak a tűzgömb közepének hőmérséklete. További vizsgálatok kellenek a pontosításhoz. Az  $\epsilon$  paraméter kicsi, mert a spektrum az azimutális szimmetria felé viszi az illesztést. Az  $u_t^2/b$  mennyiség azért negatív, mert a  $b$  negatív. Mivel a számolások során csak ez a kombináció fordul elő, érdemes volt ezt illeszteni. A  $\tau_0$  az eddigi illesztésekkel hibahatáron belüli egyezést mutat. ( $1 \text{ fm} = 3 \cdot 10^{-24} \text{ s}/c$ )

Mindezen eredményekből látható, hogy a vizsgált hidrodinamikai modell alkalmazható az ALICE által mért adatok leírására. Ehhez azonban kellett tenni néhány megszorítást. A hidrodinamikai kép csak  $\sim 2$  GeV-ig érvényes, mert onnan már más folyamatok dominálnak. Azonban az elliptikus folyás ábrájáról, illetve a magas hőmérsékletből látható, hogy a modell nem tökéletes. A  $v_2$  ábrán látható, hogy az illesztés nem tökéletes, mely azzal magyarázható, hogy az  $u^\nu = x^\nu/\tau$  gömbszimmetrikus sebességmező, így az azimutális aszimmetriát leíró elliptikus folyás nem illeszthető megfelelően.

### 6.2. Az eredmények konstans hőmérsékletprofil esetén

Az illesztéseket ebben az esetben is ugyanazzal a kóddal végeztem el, csak a megfelelő függvények definícióját módosítottam az 5.3-as fejezetnek megfelelően. Így csak két paramétert kellett illesztenem, mert a hőmérséklet eloszlásban megjelenő  $\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0, \tilde{Z}_0$  tagok ebben az esetben konstans értékűek. Továbbá a gömbszimmetria miatt az elliptikus folyást sem kellett illeszteni. Az illesztések paramétereit a 2. táblázat tartalmazza, valamint a 4. ábra mutatja az ábrázolt függvényeket.





3. ábra. A spektrum és a HBT sugarak illesztései az LHC adatokra. Figyelembe kellett venni, hogy a hidrodinamikai kép csak  $\sim 2$  GeV-ig ad jó eredményeket, mert körülbelül eddig tekinthető érvényesnek a hidrodinamikai kép.

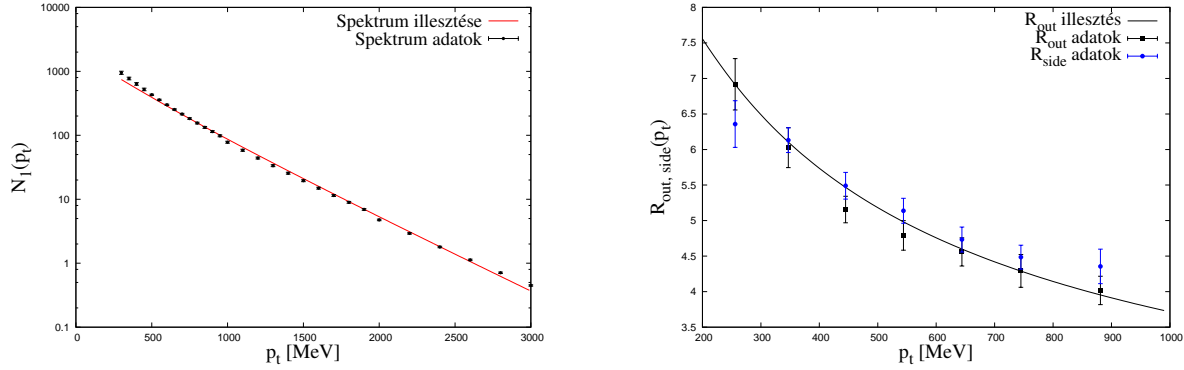
Paraméter	Érték	Hiba
$T_0$	201.18	$\pm 0.64$
$\tau_0$	8.35	$\pm 0.80$

2. táblázat. Az illesztett paraméterek értékei a spektrumra és a HBT sugarakra.

## 7. Realisztikus állapotegyenletek

### 7.1. Megmaradó részecskeszám

Az előző fejezetben bemutatott megoldásban a  $\kappa$  konstans. Általánosabb eredményre juthatunk, ha feltesszük, hogy a  $\kappa$  függ a hőmérséklettől:  $\kappa = \kappa(T)$  [20]. Ezt behelyettesítve az eddigi ál-



4. ábra. A spektrum és a HBT sugarak illesztése a  $b = 0$  esetben. Az illesztési paraméterek értékeit az 2. táblázat tartalmazza.

lapotegyenletbe:

$$\epsilon = \kappa(T)p, \quad (115)$$

ahol  $nT = p$ . Az előző fejezetbeli megoldáshoz hasonlóan a számsűrűség

$$n = n_0 \left( \frac{V_0}{V} \right) \nu(s) \quad (116)$$

összefüggéssel értelmezett,  $\nu(s)$  tetszőleges függvény,  $s$  pedig a  $()$  is felírt skálaparaméter. A sebességtér itt is Hubble-jellegű lesz, figyelembe véve az ellipszoidális szimmetriát:

$$u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau}. \quad (117)$$

alakban áll elő, ahol az  $s$  együttmozgó deriváltja eltűnik:  $u^\mu \partial_\mu s = 0$ . Behelyettesítve a (116) kifejezést a kontinuitási egyenletbe,  $u^\mu \partial_\mu s = 0$  teljesülése mellett,  $V$ -re a következő összefüggés adódik:

$$u^\mu \partial_\mu V = V \partial_\mu u^\mu. \quad (118)$$

Ez akkor teljesül a fenti sebességmezőre, ha  $V = \tau^3$  és  $s$  skálaparaméter a (7.1) alakban áll elő. Az energiaegyenletbe behelyettesítve a (115) állapotegyenletet és felhasználva (116) alakot a számsűrűségre

$$nT(\kappa + 1)\partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu nT = 0 \quad (119)$$

alakot kapjuk. A deriváltakat kifejtve és felhasználva a kontinuitási egyenletet, egyszerűsítve  $n$ -nel

$$u^\mu T \partial_\mu \kappa + u^\mu \kappa \partial_\mu T + T \partial_\mu u^\mu = 0 \quad (120)$$

mely a következő differenciálegyenletként írható fel hőmérsékletre

$$T\partial_\mu u^\mu + u^\mu \frac{d\kappa(T)T}{dT} \partial_\mu T = 0. \quad (121)$$

Átrendezve és kihasználva a (118)-es egyenletet,

$$u^\mu \left( \frac{d\kappa(T)T}{dT} \frac{\partial_\mu T}{T} - \partial_\mu \ln \left( \frac{V_0}{V} \right) \right) = 0. \quad (122)$$

egyenlethez jutunk.

Ez az egyenlet két esetben teljesül: ha a zárójeles kifejezés egyenlő nullával vagy ha a négyes-sebesség vektor és a zárójeles kifejezéssel megadott vektor merőlegesek egymásra. Egyszerűsítésként az előbbit vizsgálom a továbbiakban, ahogy az a [20] cikkben is olvasható. Az egyenlet a következő egyszerűbb alakot ölti:

$$\frac{d\kappa(T)T}{dT} \frac{\partial_\mu T}{T} = \partial_\mu \ln \left( \frac{V_0}{V} \right) \quad (123)$$

Ezt az egyenletet egy

$$\frac{V_0}{V} = \exp \int_{T_0}^T \frac{d\kappa(T')T'}{dT'} \frac{\partial_\nu T'}{T'} dT' \quad (124)$$

alakú egyenlettel megadott  $V_0/V$  megoldja.

$V = \tau^3$  választással az integrál elvégezhető, és a  $T(\tau)$  függvény megkapható. Ez látható a 8. ábrán és a [20] cikkben.

Az Euler egyenletbe helyettesítve a (115) állapotegyenletet, felhasználva a (11) kontinuitási egyenletet és (124)-as egyenletet a következő alakra jutunk:

$$(\kappa + 1)u^\nu \partial_\nu u^\mu - \frac{k+1}{k} u^\mu \partial_\nu u^\nu = \frac{k+1}{k} \partial^\mu \left( \ln \frac{V_0}{V} \right) + \left( \frac{\partial^\mu \tau(s)}{k\tau(s)} + \frac{\partial^\mu \nu(s)}{\nu(s)} \right) \partial^\mu s \quad (125)$$

ahol bevezettük a  $k = d\kappa T/dT$  jelölést. Látszik, hogy ha  $k = \text{konstans}$ ,  $u^\mu = x^\mu/\tau$ ,  $V = \tau^3$  akkor teljesül az egyenlet. Az esetben is teljesül, ha  $u^\mu = x^\mu/\tau$ ,  $V = \tau^3$ ,  $\nu(s) = \tau(s) = 1$ , ekkor  $\kappa(T)$  tetszőleges.

Ebben az esetben tehát általánosabb megoldást kaptunk az előző fejezetben tárgyaltnál abban az értelemben, hogy a  $\kappa$  paraméter hőmérsékletfüggését figyelembe vettük. A  $T(\tau)$  alakjára se tettünk fel semmit, hanem egy differenciálegyenlet megoldásával adtuk meg, igaz impliciten. Láttuk, hogy a

$$n = n_0 \left( \frac{V_0}{V} \right) \quad (126)$$

számsűrűség függvény, ahol  $u^\nu \partial_\nu s = 0$  igaz az  $s$  skálaparaméterre és megszorítás ad  $u^\nu$ -re is, valamint

$$\exp \left[ \int_{T_0}^T \left( \frac{d\kappa(T')T'}{dT'} \frac{1}{T'} \right) dT' \right] = \frac{\tau_0^3}{\tau^3} \quad (127)$$

egyenletből származtatott  $T(\tau)$  függvények.

## 7.2. Nem-megmaradó részecskeszám

Általánosabb tárgyalásmódot is választhatunk, ha nem teszünk fel a számsűrűségnek semmilyen alakot [20]. Ha így járunk el, a termodinamikai mennyiségek közötti összefüggéseket a Gibbs–Duhem-relációból származtathatjuk, ahol a kémiai potenciál nulla, ezért a részecskeszám nem marad meg:

$$\epsilon = Ts - p \rightarrow d\epsilon = Tds \quad , \quad \text{mivel} \quad (128)$$

$$dp = sdT \quad (129)$$

Ha az energiaegyenletbe behelyettesítjük az  $\epsilon + p = Ts$ , illetve  $d\epsilon = Tds$ -t

$$Ts\partial_\nu u^\nu + u^\nu T\partial_\nu s = 0 \rightarrow T\partial_\nu (su^\nu) = 0 \quad (130)$$

egyenletre jutunk tetszőleges  $T$  mellett, vagyis az entrópiára is egy kontinuitási egyenlet vonatkozik:

$$\partial_\nu (su^\nu) = 0. \quad (131)$$

Az  $\epsilon + p = Ts$ , illetve  $\epsilon = \kappa p$  alakokat használva, a

$$Ts\partial_\nu u^\nu + u^\nu \partial_\nu \kappa p = 0 \quad (132)$$

egyenletre jutunk, melyből a deriválásokat elvégezve

$$Ts\partial_\nu u^\nu + u^\nu (\kappa s\partial_\nu T + p\partial_\nu \kappa) = 0 \quad (133)$$

alakot kapjuk, amelyből átrendezéssel:

$$u^\nu \partial_\nu T \left( \frac{\kappa}{T} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{d\kappa}{dT} \right) = \partial_\nu u^\nu \quad (134)$$

Speciálisan itt is feltehetjük, hogy  $u^\nu$  egy Hubble jellegű sebességmező, vagyis (118) összefüggés teljesülése esetén erre a megoldásra is adható egy integrálegyenlet, a fent említett egyszerűsítéssel élve, melyben az integrált elvégezve  $T(\tau)$ -t szintén megkaphatjuk. Ez az integrálegyenlet

$$\int_{T_0}^T \left( \frac{\kappa}{T} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{d\kappa(T')}{dT'} \right) dT' = \ln \frac{V_0}{V}. \quad (135)$$

alakban adható meg.

Ez esetben is feltehető, hogy  $V = \tau^3$ , így numerikusan elvégezhető az integrál, ahogy az a [20] cikkben is látható.

Vagyis, ha nem tesszük fel a számsűrűség alakját, csupán a Gibbs–Duhem-relációból és a feltevésből, hogy  $\kappa = \kappa(T)$ , megkapjuk az entrópiamegmaradást. Ebben az új megoldásban a  $T(\tau)$  függvényt a

$$\exp \left[ \int_{T_0}^T \left( \frac{\kappa}{T} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{d\kappa(T')}{dT'} \right) dT' \right] = \frac{V_0}{V} \quad (136)$$

egyenletből kaphatjuk meg, a sebességmezőt pedig

$$u^\nu = \frac{x^\nu}{\tau} \quad (137)$$

alakban kapjuk meg. Teljesülnie kell a  $u^\mu \partial_\mu V = V \partial_\mu u^\mu$  egyenletnek, azaz, például a jelen megoldásban  $V = \tau^3$ .

### 7.3. Nyomásfüggő állapotegyenlet

Az előzőekben bemutatottakhoz képest egy más megközelítés, ha  $\kappa = \kappa(p)$  alakot teszünk fel [20]. Ekkor az állapotegyenlet

$$\epsilon = \kappa(p) \cdot p \quad (138)$$

alakú. Vagyis sem a számsűrűsége, sem a nyomásra nem teszünk fel semmilyen alakot. Ekkor, ha kiindulunk az (17) energiaegyenlet átrendezett alakjából:

$$\partial_\nu(\epsilon u^\nu) + p \partial_\nu u^\nu = 0. \quad (139)$$

és kihasználva a  $u^\nu \partial_\nu V = V \partial_\nu u^\nu$  összefüggést, a következő alakra jutunk:

$$\frac{u^\nu \partial_\nu \epsilon}{p} + \frac{\epsilon u^\nu}{p} \cdot \partial_\nu \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) + u^\nu \partial_\nu \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) = 0, \quad \text{azaz} \quad (140)$$

$$u^\nu \left( \frac{\partial_\nu \epsilon}{p} + \frac{\epsilon}{p} \cdot \partial_\nu \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) + \partial_\nu \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) \right) = 0 \quad (141)$$

Átrendezve

$$\left( \frac{\epsilon}{p} + 1 \right) \partial_\nu \ln \left( \frac{V_0}{V} \right) = \frac{\partial_\nu \epsilon}{p} \quad (142)$$

alakot kapjuk. Ezt egy

$$\ln \frac{V_0}{V} = \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\epsilon + p} \quad (143)$$

alakú egyenlet megold. El lehet végezni egy olyan integráltranszformációt, mellyel áttérhetünk a  $p$  szerinti integrálásra.

$$d\epsilon = \frac{d\epsilon}{dp} dp, \quad \text{azaz} \quad (144)$$

$$\ln \frac{V_0}{V} = \int_{p_0}^p \frac{\frac{d\epsilon}{dp} dp}{(\kappa + 1)p} \quad (145)$$

amiből, kihasználva, hogy

$$\frac{d\epsilon}{dp} = \kappa + \frac{d\kappa}{dp} p \quad (146)$$

felírható:

$$\int_{p_0}^p \left( \frac{\kappa}{(\kappa + 1)p} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{d\kappa}{dp} \right) dp \quad (147)$$

Ez az integrál elvégezhető, ha adott egy  $\kappa(p)$  függvény.

Azaz, ha feltesszük, hogy  $\kappa = \kappa(p)$ , és olyan  $u^\nu$ -t és  $V$ -t választunk, hogy  $u^\nu \partial_\nu V = V \partial_\nu u^\nu$  teljesüljön, a fent implicit módon megadott  $\kappa(p)$  függvénnyel egy új megoldást kaptunk [20].

Megkaphatjuk az előző alfejezetben tárgyalt megoldást, ha feltesszük, hogy  $p = p(T)$ . Ugyanis ekkor elvégezhetünk egy újabb integráltranszformációt:

$$dp = \frac{dp}{dT} dT. \quad (148)$$

Ha ezt beírjuk a (147) integrálba

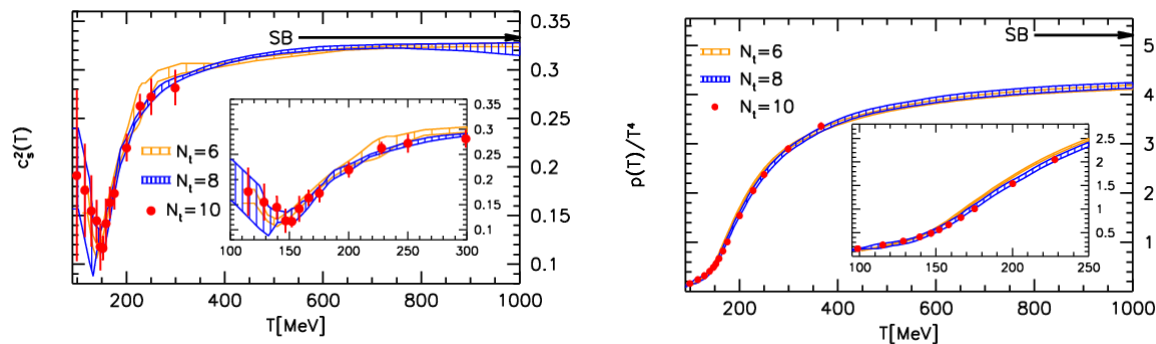
$$\int_{p_0}^p \left( \frac{1}{\kappa + 1} \frac{d\kappa}{dT} \frac{dT}{dp} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{\kappa}{p} \right) \frac{dp}{dT} dT \quad (149)$$

alakot kapjuk. Figyelembe véve a  $dp/dT = \sigma = (\epsilon + p)/T = p(\kappa + 1)/T$  összefüggést, visszakapjuk a (135) alakot:

$$\int_{T_0}^T \left( \frac{\kappa}{T} + \frac{1}{\kappa + 1} \frac{d\kappa}{dT} \right) dT. \quad (150)$$

Ebből is látható, hogy a nyomásfüggő állapotegyenlet helyes eredményt ad. Az integrált általánosan  $p$ -re nem tudtam elvégezni, mert a parametrizáció, melyet használtam hőmérsékletfüggő mennyiségeket adott meg. Mint láthattuk, a hőmérsékletfüggés feltevése visszavezet az előző megoldásra.

Ebben a három alfejezetben az állapotegyenlet olyan alakjait vizsgáltam, melyek reálisabban írják le a rendszert, mint a  $\kappa = \text{konstans}$ -t feltevő modellek. Ezekből a számolásokból és a következő fejezetben található ellenőrzésből egy cikk is született [20].



5. ábra. A  $c_s$  és a  $p/\epsilon$  mennyiségek, mint a hőmérséklet függvényei [9]

#### 7.4. Megoldások vizsgálata a rác-QCD segítségével

A QCD a kvarkok és gluonok, valamint a köztük ható erős kölcsönhatás térelmélete. A rác-QCD egy olyan nem-perturbatív közelítő módszer, mely a téridő pontjain, mint egy rácson írja fel a QCD egyenleteit. Ezzel a közelítő módszerrel kapott eredmények találhatók [9] cikkben. Több megfigyelhető termodinamikai mennyiséget, mint a nyomást, az energiasűrűséget, az entrópiasűrűséget és a hangsebességet is kiszámoltak rác-QCD szimulációk segítségével. Ilyen mennyiség a „trace anomaly”, melyből a szükséges  $\kappa(T)$  függvényt is nyertem. Ennek definíciója:

$$I = \epsilon - 3p \quad (151)$$

melyet még  $T^4$ -nel normáltak. Ezt a numerikus számolásoknál kellett figyelembe vennem. A cikkben ezt a függvényt egy parametrizációval kapták meg, mely

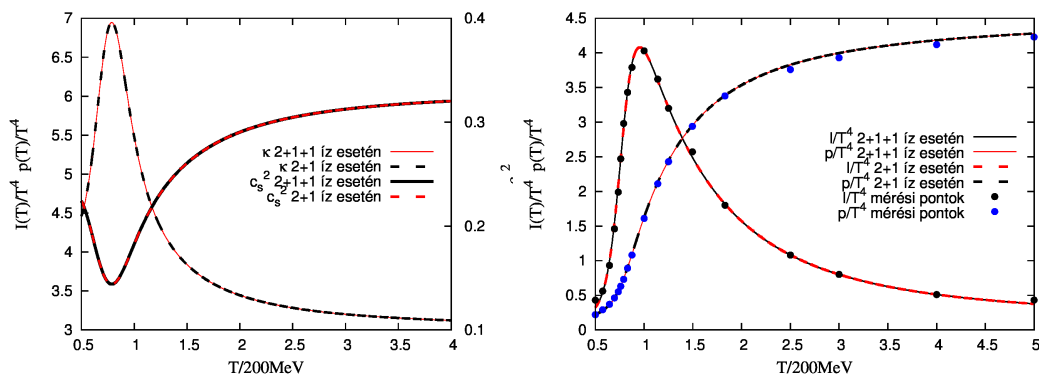
$$\frac{I(T)}{T^4} = \exp(-h_1/t - h_2/t^2) \cdot \left( h_0 + \frac{f_0 [\tanh(f_1 t + f_2) + 1]}{1 + g_1 t g_2 t^2} \right) \quad (152)$$

alakú ahol a dimenziótlan  $t$  definíciója  $t = T/(200\text{MeV})$ . A paramétereket a 3.táblázat tartalmazza. A rác-QCD szimulációk alapján készült a 5. ábra.

Ízek száma	$h_0$	$h_1$	$h_2$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$g_1$	$g_2$
2+1	0.1396	-0.1800	0.0350	2.76	6.79	-5.29	-0.47	1.04
2+1+1	0.1396	-0.1800	0.0350	5.59	7.34	-5.60	1.42	0.50

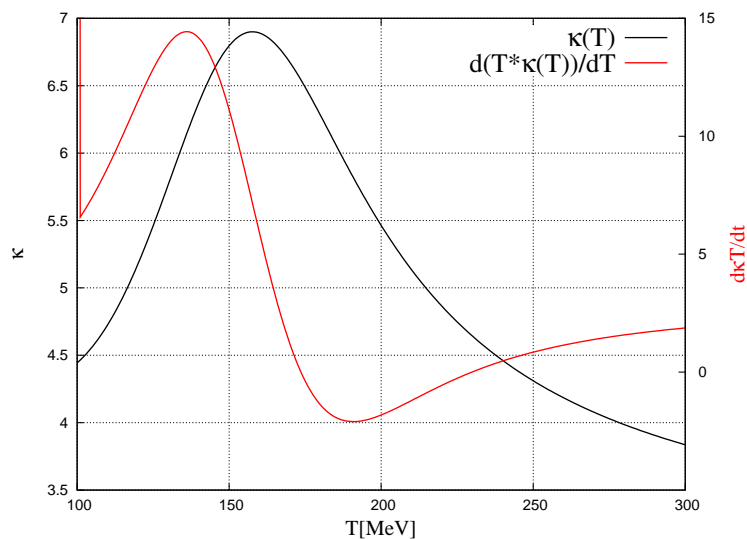
3. táblázat. A parametrizációhoz szükséges konstansok értékei.

A parametrizációból adódó függvény, a cikkben közölt adatok valamint konstansok alapján készítettem egy ábrát, melyben ábrázolom az adatokat és mind a két konstans szettel a függvényeket. Ez a 6. ábrán látható. A  $\kappa = I/p + 3$  összefüggés alapján, csak az  $I$  függvény kellett



6. ábra. Ellenőrzésként mindkét, a 2. táblázatban megtalálható konstans szettel ábrázoltam a parametrizált függvényt, valamint az abból származó  $\kappa$  függvényt. Mindkét esetben a [9] cikkben megtalálható adatokat használtam.

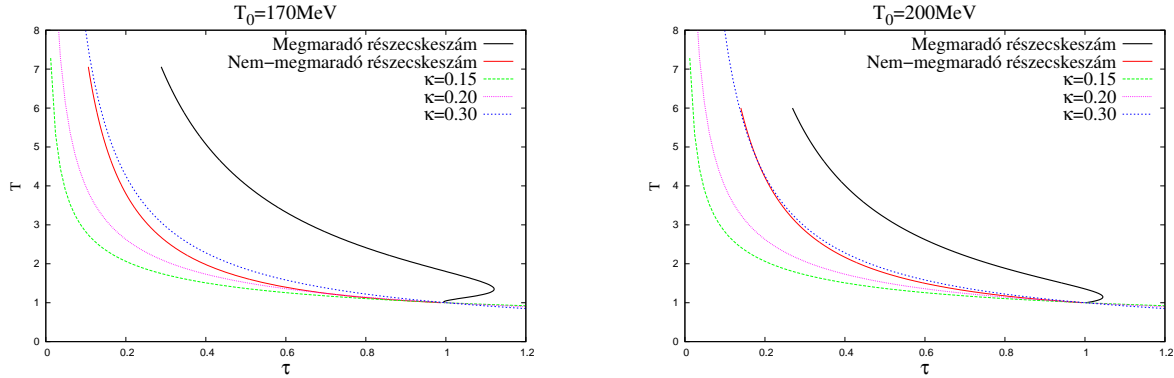
integrálni ahhoz, hogy kapjak egy függvényt  $\kappa$ -ra, mint az a 6. ábrán látható. Behelyettesítve az eredményt szintén numerikusan integrálva megkaphattam a  $T(\tau)$  függvényt, mely az 8. ábrákon láthatók különböző kezdőhőmérsékletekkel.



7. ábra. A  $\kappa(T)$  és  $d\kappa(T)T/dT$  függvények ábrái.

Alacsonyabb hőmérsékleten az a megoldás, ahol a számsűrűségnek konkrét alakja van, a  $T(\tau)$  függvény „furcsán viselkedik”. Ennek oka a  $\kappa(T)$  függvény deriváltjának túlzott negativsága. Ez a 7. ábrán látható. Ebben a tartományban ugyanis fizikailag értelmetlen eredményeket kapunk



8. ábra. Az integrálásból kapott  $T(\tau)$  függvények.

a (120) egyenletből. Ugyanis, ha

$$\frac{d\kappa T}{dT} \leq 0 \rightarrow \partial_\mu u^\mu \leq 0 \quad (153)$$

ami fizikailag nem realiztikus. Ha csak a konkrét sebességmezőt tekintjük és deriváljuk

$$\partial_\nu u^\nu = \partial_\nu \frac{x^\nu}{\tau} = \frac{\tau \partial_\nu u^\nu - x^\nu \partial_\nu \tau}{\tau^2} = \frac{3}{\tau} > 0. \quad (154)$$

De ha általánosan megvizsgáljuk az  $u^\nu = \gamma(1, \mathbf{v})$  alakot, ahol a  $\mathbf{v}$  a hármassebesség és  $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$  akkor a deriválásból következő három tag jön ki:

$$\partial_t \gamma + \text{div} \gamma \mathbf{v} = \gamma^3 \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} + 3\gamma \text{div} \mathbf{v} + \gamma^3 v^2 \text{div} \mathbf{v}. \quad (155)$$

Az első tagban minden tag pozitív, kivéve ha  $\mathbf{v}$  valamelyik komponense negatív. Ugyanez érvényes a második, illetve a harmadik tagnál is. A negatív komponens azt jelentené, hogy az egyik irányban a tűzgömb összezsugorodik. Mivel a modell robbanásszerű folyamatot ír le, ez nem realiztikus. Általában elképzelhető olyan rendszer, amire ez jó sebességmezőt jelentene, de ebben az esetben nem alkalmas.

## 8. Összefoglalás

A dolgozat célja volt bemutatni, hogy a nehézion-fizika területén hogyan alkalmazhatóak a relativisztikus hidrodinamikai modellek. Rövid történeti áttekintés után bemutattam egy 1+3 dimenziós modellt, mellyel az illesztéseket az LHC ALICE detektorának adataira elvégeztem. Bár az illesztésnél a hőmérsékletre magas érték adódott, ez magyarázható azzal, hogy az anyag belső részei nagyon forrók voltak.

Saját eredményem továbbá a modell egy egyszerűsített alakjából kiszámított megfigyelhető mennyiségek és illesztésük. Rámutattam, hogy a modell ezen gömbszimmetrikus formájában is használható olyan mennyiségek illesztésére, mint a spektrum vagy a HBT sugarak. Ezen esetben az azimutális aszimmetriát nem lehetett vizsgálni.

Három általánosítást is bemutattam, realiztikus állapotegyenletekkel. Az első esetben egy hőmérsékletfüggő  $\kappa$  paraméterrel felírt állapotegyenletet vizsgáltam megmaradó részecskeszám mellett. Az vizsgálat során kiderült, hogy ez a modell ott, ahol a  $\kappa$  deriváltja negatív, fizikailag nem reális eredményt ad. Ellenben, ha nem tesszük fel a megmaradó részecskeszámot, csupán a  $\kappa = \kappa(T)$ -t, a Gibbs–Duhem-relációból számolva, ilyen probléma nem merül fel. Ezekhez a megoldásokhoz felhasználva a rács-QCD eredményeit, numerikus számolás útján ábrázoltam a  $T(\tau)$  függvényt, ezzel is ellenőrizve a megoldások helyességét.

Szintén saját eredményem a nyomásfüggő állapotegyenletnél kapott eredmény. Mivel nem állt rendelkezésre  $\kappa = \kappa(p)$  függvény az ellenőrzéshez ([9] cikkben a mennyiségek a hőmérséklet függvényében voltak megadva), ezért ebben az esetben nem tudtam olyan numerikus analízist végezni, mint az előző két esetben, de elő tudtam állítani ezen megoldásból a nem-megmaradó részecske szám melletti megoldást.

## 9. Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, Csanád Máténak, hogy betekintést nyerhettem egy izgalmas tudományterületre, a kutatói munkába és általában a tudományos élet színes világába. Köszönet illeti szüleimet, egész családomat és barátnőmet, Czinder Anitát a lelkes támogatásért, türelemért. Köszönöm Barabás Péternek, hogy a dolgozatot gondosan átolvasta és értékes megjegyzéseivel segítette munkámat.

## 10. Függelék

### 10.1. A hidrodinamika térelméleti levezetése

A térelméletet jelen esetben folyadékokra alkalmazzuk. Jelen függelék célja a hidrodinamika alapegyenleteinek levezetése térelméleti módszerekkel.

#### Klasszikus Lagrange-koordinátázás

A Lagrange-koordináta egy tömegelemmel együtt mozgó, az elmozdulás tér egy pontja. Kezdeti feltételnek egy  $t_0$  időpillanatban kiválasztott  $r_0$  koordináta számít, ez azonosítja a tömegelemet. A sebességet és a gyorsulást:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (156)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (157)$$

összefüggések adják, ahol  $\mathbf{r}_0$  a folyadékelem kezdeti feltétele, a  $t = 0$  időpontbeli helyvektor.

#### Klasszikus Euler-koordinátázás

Ahhoz, hogy áttérjünk a Lagrange-koordinátákról az Euler-koordinátákra a

$$\mathbf{v}_E(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), t) \quad (158)$$

vagy az Euler-képből a Lagrange-képbe való áttéréshez a

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t) \quad (159)$$

függvényt keressük, ahol a  $v_E$  az Euler-képbeli sebességmezőt, míg  $v_L$  a Lagrange-képbeli sebességmezőt jelöli. Vagyis lényegében az együttmozgó rendszerről térünk át laborrendszerre (Lagrange  $\rightarrow$  Euler), vagy fordítva (Euler  $\rightarrow$  Lagrange).

A totális derivált a Lagrange-képbeli mező időderiváltja Euler-képben. Tömören jelölve:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{F} \quad (160)$$

ahol  $\mathbf{F}$  egy Lagrange-képbeli mező. Így például a sebességmező a következőképpen írható át:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \quad (161)$$

Látjuk tehát, hogy a konvektív tag az Euler-egyenletben tulajdonképpen egy áttérés egy másik képbe. Ha bevezetjük  $\mathbf{J}$  Jacobi-mátrixot és annak determinánsát  $J$ -t

$$J_{ab} = \frac{\partial r_a}{\partial r_{0b}} \quad (162)$$

alakban, ahol az  $a, b$  a komponenseket indexelik akkor kapjuk

$$\rho d^3r = \rho J d^3r_0 = \rho_0 d^3r_0 \quad (163)$$

amiből látható, hogy

$$\rho = \frac{\rho_0(\mathbf{r}_0)}{J(\mathbf{r}_0, t)}. \quad (164)$$

Klasszikus mechanikából ismert, hogy az  $L$  Lagrange-függvény megadható, mint  $L=K-V$ , ahol  $K$  a kinetikus,  $V$  pedig a potenciális energia. Ezt sűrűségekre átfogalmazva általánosan felírhatjuk

$$\Lambda = \rho_0 \left( \frac{v^2}{2} - \epsilon \right), \quad (165)$$

alakot. Behelyettesítve az

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r_a} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_{a,i}} + \frac{\partial}{\partial r_{0b}} \frac{\partial \Lambda}{\partial r_{a,b}} \quad (166)$$

alakú Euler–Lagrange-egyenletbe. Itt  $r_{a,t} = \partial r_a / \partial t$ ,  $r_{a,b} = \partial r_a / \partial b$  jelölést vezetjük be, ahol az  $a, b$  a komponenseket indexelik. A deriváltakat külön-külön kiírva:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r_a} = 0 \quad (167)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r_{a,t}} = \rho_0 v_a. \quad (168)$$

Itt fontos még egy közbevetés. Az adiabatikusság miatt a pálya mentén az entrópia állandó. Vagyis a termodinamika I. főtétele a következő alakot ölti:

$$d\epsilon = \frac{pd\rho}{\rho^2} \quad (169)$$

Ezt felhasználva a harmadik tagot is kiszámítva

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial r_{a,b}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial J_{ab}} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial J_{ab}} \epsilon \left( \frac{\rho_0}{J}, s_0 \right) = \frac{\rho_0^2}{J^2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \frac{\partial J}{\partial J_{ab}} = p J J_{ba}^{-1} \quad (170)$$

és vissza írva az (166) Euler–Lagrange-egyenlet (168),(170) tagjait

$$\rho_0 \frac{\partial v_a}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r_b} p J J_{ba}^{-1}, \quad (171)$$

alakra jutunk, ahol  $J$  a  $\mathbf{J}$  Jacobi mátrix determinánsa,  $J_{ba}^{-1}$  az elmozdulástér gradiensének inverzéből származik.

Ha figyelembe vesszük, hogy a fenti eredményt is Lagrange-koordinátákban kaptuk, ráismerünk az Euler-egyenletre, hisz Euler-koordinátákban a Jacobi-determináns kifejezései egyet adnak. Kifejtve tehát a deriváltat a (161) szerint

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} + \left( \frac{\partial u_a}{\partial x_a} \right) u_a = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_a} \quad (172)$$

ahol  $u_a$  egy Euler-képbeli sebességmező egy koordinátája,  $x_a$  pedig egy Euler-képbeli helyvektor egy koordinátája.

### Relativisztikus Euler-koordinátázás

A relativisztikus hidrodinamika Lagrange-sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$\Lambda = -\rho\epsilon(\rho, s) + \frac{\rho\nu}{2} (1 - g^{ij}u^i u^j) \quad (173)$$

ahol  $\rho, \epsilon, s$  a pillanatnyilag együttmozgó rendszerbeli, más szóval nyugalmi sűrűség, fajlagos belső energia és entrópia, valamint alkalmaztuk a kinematikai kényszert. Euler képben azokat a megmaradási tételeket, melyek a lagrange-i képben maguktól adódtak, multiplikátorokkal kell figyelembe venni, mint külső kényszereket. Ilyen megmaradási tételek a kontinuitási egyenlet, az adiabatikusság, a kezdeti feltétel megmaradása <sup>3</sup>. Ezek után a teljes LSF összeáll a fenti Lagrange sűrűségfüggvényből és egy, a kényszereket is tartalmazó Lagrange sűrűségfüggvényből. Elvégezve a variálásokat kiderül, hogy a pálya mentén a Lagrange sűrűségfüggvény értéke maga a nyomás:

$$\Lambda_{teljes} = \rho \left( -\epsilon + \dot{\Phi} \right) = \rho(w - \epsilon) = p \quad (174)$$

ahol  $w = p/\rho + \epsilon$  a fajlagos entalpia. A variációs elvekből megkaphatjuk az általánosított Euler egyenletet is:

$$\frac{Dwu_i}{d\tau} = (wu_i)_{;j} u^j = \frac{p_{;i}}{\rho} \quad (175)$$

Itt a  $_{;j}$  a teljes divergenciát jelöli.

Így az EIT kanonikus előállításban a következőképpen néz ki:

$$T^{ij} = \phi_{\alpha,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{\alpha,i}} - g_i^j \Lambda = \rho \frac{w}{c^2} u^i u^j - g^{ij} p. \quad (176)$$

Vagy a Hilbert-féle előállítást használva

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \Lambda}{\partial g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \Lambda = \rho \frac{w}{c^2} u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p \quad (177)$$

A kétféle előállítás közötti különbség az, hogy relativisztikusan mindig csak a Hilbert-féle EIT Lorentz-invariáns. Azonban nem feltétlenül következnek belőle megmaradási tételek, míg a kanonikusból igen.

<sup>3</sup>A kezdeti feltétel megmaradását úgy kell érteni, hogy az  $x^i(\tau, \mathbf{r}_0)$  pályavonal invertálható  $\mathbf{r}_0$ -ban. Ez matematikailag annyit jelent, hogy a pályák nyalábok.

## 10.2. Alkalmazott módszerek

### Az illesztés

A modellből származó függvényeket, mint a (91) transzverz impulzus eloszlás, a (102) HBT-sugarak és az (95) elliptikus folyás egy C++ kódba írtam és ott a szabad paraméterek illesztését a Minuit minimalizáló programcsomaggal elvégeztem. Az illesztés előtt egy külön adatfájlból behívtam az LHC ALICE detektorának adatait és egy másik fájlból az illesztendő paraméterek kezdőértékeit hibáját, minimumát, maximumát. Praktikus az adatok ilyen módon történő bekérése, mert nem kell folyton a kódot módosítani, ha az adatok valamely értékét módosítani szeretnénk.

```
ifstream param(argv[1], ios::in);
while(!param.eof())
{
    string parname;
    param >> parname;
    if(parname.compare("T0")==0) param >> T0 >> T0err >> T0min >> T0max;
}
param.close();
```

Azért praktikus ez az eljárás, mert nem a kódot kell átírni, vagy az adatfájlt módosítani. Egyszerűen meg lehet határozni az illesztendő pontok számát, hibáját, stb. Például, ha egy pontot sem szeretnénk illeszteni, akkor a paramétereket tartalmazó fájl a következőképpen néz ki:

T0	200	0.1	0	0
eps	0.51	0.1	0	0
ut2b	-0.32	0.1	0	0
tau0	8.1	0.1	0	0
Z0v2b	-10	0	0	0
Norm 1e	-3	0.1	0	0
v2dat	0			

Itt tulajdonképpen azzal, hogy a `v2dat` nulla, azt deklaráltam, hogy a `v2dat` tömb mérete 0, ugyanis a kódban a következő helyen jelenik meg a nulla érték:

```
for(int i=0;i<v2dat;i++)
{
    double pt = pti5[i];
    double data5 = dat5[i];
    double error5 = err5[i];
    .
    .
    .
}
```

vagyis a `for` ciklus nullától nulláig tart.

Ha, tegyük fel, húsz adatpontunk van, de mi csak az első tízet szeretnénk illeszteni, akkor egyszerűen a `v2dat` 10 sort kell beírni a bemeneti fájlban a megfelelő helyre.

Tehát, ha a függvények deklarálása, a mérési adatok és paraméterértékek beolvasása után a minimalizálással is kész a program, már ki is írhatja egy adatfájlba és lehet ábrázolni. Ezt én Gnuplot szkriptekkel valósítottam meg.

## A numerikus analízis

A rács-QCD segítségével meg tudtam vizsgálni (ahogy az a 7.4-es fejezetben látható), hogy az általánosított megoldásokból milyen  $T(\tau)$  függvények adódnak. Ehhez kellett a (152)-es egyenlettel megadott függvény, melyhez a paraméterértékeket is a cikkből vettem.

Ehhez írtam egy C++ kódot, mellyel először magát az  $I$  függvényt deklaráltam majd ezután ezt kiintegrálva megkaptam a  $p(T)$  függvényt. A  $\kappa$  kiszámolásánál ezek hányadosára volt szükségem, ezt a kiintegrált és az eredeti függvény hányadosa adta.

A  $\kappa$  deriváltjára is szükségem volt az integrál kiszámításához; ezt szintén a kódból kaptam. Ezzel már tudtam definiálni a 7.2, 7.3-as részben felírt integrálokat, melyek elvégzése után lehetett ábrázolni a kívánt függvényeket. Ehhez ebben az esetben is Gnuplot szkriptet írtam.

## Hivatkozások

- [1] M. Nagy and R. Vértési, A kvarkanyag nyomában - nagyenergiás nehézion-fizikai kutatások a PHENIX kísérletben, 2010.
- [2] K. Adcox *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 022301 (2002) [arXiv:nucl-ex/0109003].
- [3] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 072301 (2003) [arXiv:nucl-ex/0304022].
- [4] K. Adcox *et al.*, Nucl. Phys. **A757**, 184 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410003].
- [5] S. S. Adler *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 072303 (2003) [arXiv:nucl-ex/0306021].
- [6] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 162301 (2007) [arXiv:nucl-ex/0608033].
- [7] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 172301 (2007) [arXiv:nucl-ex/0611018].
- [8] A. Adare *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 132301 (2010) [arXiv:0804.4168].
- [9] S. Borsányi *et al.*, JHEP **1011**, 077 (2010) [arXiv:1007.2580].
- [10] K. Aamodt *et al.*, Phys.Lett. **B696**, 328 (2011) [arXiv:1012.4035].
- [11] K. Aamodt *et al.*, Phys.Rev.Lett. **105**, 252302 (2010) [arXiv:1011.3914].
- [12] K. Aamodt *et al.*, Phys.Lett. **B696**, 30 (2011) [arXiv:1012.1004].
- [13] S. Belen'kji and L. Landau, Il Nuovo Cimento (1955-1965) **3**, 15 10.1007/BF02745507 (1956).
- [14] R. C. Hwa, Phys. Rev. D **10**, 2260 (1974).
- [15] J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).
- [16] A. Bialas, R. A. Janik, and R. Peschanski, Phys. Rev. C **76**, 054901 (2007).
- [17] T. Csörgő, M. I. Nagy, and M. Csanád, Phys. Lett. **B663**, 306 (2008) [arXiv:nucl-th/0605070].
- [18] T. Csörgő, L. Csernai, Y. Hama, and T. Kodama, Heavy Ion Phys. **A21**, 73 (2004) [arXiv:nucl-th/0306004].
- [19] M. Csanád and M. Vargyas, Eur.Phys.J. **A44**, 473 (2010) [arXiv:0909.4842].
- [20] M. Csanád, M. I. Nagy, and S. Lökös, [arXiv:1205.8564].